ମାଧ୍ୟମିକ ଜ୍ୟାମିତି

ନବମ ଶ୍ରେଣୀ

ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷା ପରିଷଦ, ଓଡ଼ିଶା

ମାଧ୍ୟମିକ ଜ୍ୟାମିତି

ନବମ ଶ୍ରେଣୀ ନିମନ୍ତେ

ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷା ପରିଷଦ, ଓଡ଼ିଶାଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଅନୁମୋଦିତ ଓ ପ୍ରକାଶିତ

© ସର୍ବସ୍ୱତ୍ୱ ସଂରକ୍ଷିତ

ଲେଖକମଣ୍ଡଳୀ :

ପ୍ରଫେସର ଡକ୍ଟର ବିଷ୍ଣୁ ପ୍ରସନ୍ନ ଆଚାର୍ଯ୍ୟ (ସମୀକ୍ଷକ)
ଡକ୍ଟର ମୁରଲୀଧର ସାମଲ
ଡକ୍ଟର ହାଡ଼ିବନ୍ଧୁ ପଟ୍ଟନାୟକ
ଶ୍ରୀ ବ୍ୟାସଦେବ ପାଣି
ଶ୍ରୀ ରଘୁନାଥ ମହାପାତ୍ର
ଶ୍ରୀମତୀ କବିତା ସେନାପତି
ଡକ୍ଟର ନଳିନୀକାନ୍ତ ମିଶ୍ର
ଶ୍ରୀ ନାରାୟଣ ସାହୁ (ସଂଯୋଜକ)

ପ୍ରଥମ ପ୍ରକାଶକ : ୨ ୦ ୧ ୨
୨ ୦ ୧ ୯

ଆର୍ଟପୁଲ୍ : ଗ୍ରାଫ୍ ଏନ୍ ଗ୍ରାଫିକ୍ସ, ଓଡ଼ିଆ ବଜାର, କଟକ

ମୁଦ୍ରଣ :

ମୂଲ୍ୟ :

ମୁଖବନ୍ଧ

ଆଜିର ଯୁଗ ହେଉଛି ବିଜ୍ଞାନ ଓ ପ୍ରଯୁକ୍ତି ବିଦ୍ୟାର ଯୁଗ । ତାତ୍ତ୍ୱିକ ଓ ପ୍ରୟୋଗାତ୍ମକ - ଏ ଉଭୟ ଦିଗରେ ବିଜ୍ଞାନର ଅଗ୍ରଗତି ନିମନ୍ତେ ଗଣିତ ଶାସ୍ତ୍ରର ଏକ ବଳିଷ୍ଠ ଭୂମିକା ରହିଛି । ଗଣିତ ଶାସ୍ତ୍ରର ଜ୍ୟାମିତି ହେଉଛି ଏକ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଅଙ୍ଗ । ବିଦ୍ୟାଳୟ ସ୍ତରରୁ ଜ୍ୟାମିତି ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ଏକ ଉପଯୁକ୍ତ ଭିତ୍ତିଭୂମି ଉପରେ ପ୍ରତିଷ୍ଠିତ ହେବା ବାଞ୍ଛନୀୟ ।

ସାରା ବିଶ୍ୱରେ ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ବିକାଶଶୀଳ ଦେଶମାନଙ୍କ ଭଳି ଭାରତ ମଧ୍ୟ ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଉଲ୍ଲେଖନୀୟ ଭୂମିକା ଗ୍ରହଣ କରିଛି । ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷାସ୍ତର ପାଇଁ ଜାତୀୟ ସ୍ତରରେ ପ୍ରସ୍ତୁତ National Curriculum Frame Work - 2005 ରେ ଗଣିତ ଶିକ୍ଷାକୁ ଅଧିକ ଗୁରୁତ୍ୱ ଦିଆଯାଇଛି । ତଦନୁଯାୟୀ ଜାତୀୟ ଶିକ୍ଷା ଗବେଷଣା ଓ ତାଲିମ ପରିଷଦ (NCERT), ପାଠ୍ୟଖସଡ଼ା ଓ ପାଠ୍ୟପୁସ୍ତକ ପ୍ରଣୟନ କରିଛନ୍ତି । ଜାତୀୟ ଶିକ୍ଷାସ୍ରୋତକୁ ଦୃଷ୍ଟି ଦେଇ ଓଡ଼ିଶା ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷା ପରିଷଦ, State Curriculum Framework-2007 ଅନୁଯାୟୀ ନବମ ଶ୍ରେଣୀ ପାଇଁ ସିଲାବସ୍ ପ୍ରସ୍ତୁତ କରି ତଦନୁଯାୟୀ ନୂତନ ଭାବରେ **ମାଧ୍ୟମିକ ଜ୍ୟାମିତି** ପାଠ୍ୟପୁସ୍ତକ ପ୍ରକାଶ କରିଛନ୍ତି ।

ଅଭିଜ୍ଞ ଲେଖକମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ପାଠ୍ୟପୁସ୍ତକ ରଚନା କରାଯାଇ ପୁସ୍ତକର ପାଣ୍ଡୁଲିପିକୁ ସିଲାବସ୍ କମିଟିରେ ପଠିତ ଓ ଆଲୋଚିତ ହୋଇଛି । ଆଲୋଚନା ଲବ୍ଧ ପରାମର୍ଶକୁ ପାଥେୟ କରି ପାଣ୍ଡୁଲିପିଟି ସଂଶୋଧିତ ହୋଇଛି ।

ଏହି ପୁସ୍ତକ ପ୍ରସ୍ତୁତିରେ ଆନ୍ତରିକ ସହଯୋଗ କରିଥିବାରୁ ମୁଁ ଲେଖକମଣ୍ଡଳୀ, ସମୀକ୍ଷକ ଓ ସଂଯୋଜକଙ୍କୁ ଧନ୍ୟବାଦ ଜଣାଉଛି । ଆଶା କରୁଛି, ପୁସ୍ତକଟି ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀ ତଥା ଶିକ୍ଷକ-ଶିକ୍ଷୟିତ୍ରୀଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଆଦୃତ ହେବ ।

ସଭାପତି

ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷା ପରିଷଦ, ଓଡ଼ିଶା

ପ୍ରସ୍ତାବନା

ଆଜିର ବିଜ୍ଞାନ-ଯୁଗରେ ଗଣିତହିଁ ମଣିଷର ଜୀବନଧାରାକୁ ସଂପୂର୍ଣ୍ଣ ରୂପେ ନିୟନ୍ତ୍ରଣ କରୁଛି, ଏକଥା କହିଲେ ଅତ୍ୟୁକ୍ତି ହେବ ନାହିଁ । ଅଧିକରୁ ଅଧିକ ବିଶ୍ଳେଷଣ ଓ ଗବେଷଣାଜନିତ ଜ୍ଞାନ ଗଣିତକୁ ନୂଆ ମୋଡ଼ ଦେବାରେ ଲାଗିଛି । ଏହି ପରିପ୍ରେକ୍ଷୀରେ ମାଧ୍ୟମିକ ସ୍ତରରେ ମଧ ଗଣିତ ଶିକ୍ଷାଦାନର ବିଷୟବସ୍ତୁ ତଥା ଉପସ୍ଥାପନା ଶୈଳୀରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ ଆସିବା ସ୍ୱାଭାବିକ ।

ଜାତୀୟ ଶିକ୍ଷା ଗବେଷଣା ଓ ତାଲିମ ପରିଷଦ (NCERT) ଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରସ୍ତୁତ National Curriculum Frame Work - 2005 ଏବଂ State Curriculum Framework-2007 କୁ ନେଇ ପ୍ରସ୍ତୁତ Syllabusକୁ ଭିତ୍ତି କରି ଓଡ଼ିଶା ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷା ପରିଷଦ, ଗଣିତ ପାଠ୍ୟଖସଡ଼ା(Syllabus)ର ସମୟୋପଯୋଗୀ ନବୀକରଣ କରିଛନ୍ତି । ଏହି ପାଠ୍ୟଖସଡ଼ା ଅନୁଯାୟୀ ନୂତନ ଭାବରେ **ମାଧ୍ୟମିକ ଜ୍ୟାମିତି** ପାଠ୍ୟପୁସ୍ତକ ପ୍ରକାଶ କରିଛନ୍ତି ।

ଗଣିତ ପ୍ରତି ଆଗ୍ରହ ସୃଷ୍ଟି ବିଦ୍ୟାଳୟ ସ୍ତରରେ ଗଣିତ ଶିକ୍ଷାର ଏକ ମୁଖ୍ୟ ଲକ୍ଷ୍ୟ ଓ ଏହି ଲକ୍ଷ୍ୟ ପୂରଣ ନିମିତ୍ତ ପୁସ୍ତକଟିର ଭାଷା, ଉପସ୍ଥାପନା ଶୈଳୀ ତଥା ଚିତ୍ରଗୁଡ଼ିକୁ ସୁସଂଗଠିତ କରାଯାଇଛି । ପୁସ୍ତକ ରଚନା ସମୟରେ ପାଠ୍ୟକ୍ରମର ଲକ୍ଷ୍ୟ ସହ ନବମ ଶ୍ରେଣୀ ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀଙ୍କର ବୟସ ଓ ବୌଦ୍ଧିକ ବିକାଶକୁ ଯଥାସମ୍ଭବ ଧ୍ୟାନ ଦିଆଯିବାର ଚେଷ୍ଟା କରାଯାଇଛି । ଅଭ୍ୟାସ ନିମିତ୍ତ ଅଧିକ ସୁଯୋଗ ସୃଷ୍ଟି କରିବା ଲାଗି ବହୁସଂଖ୍ୟକ ଉଦାହରଣ ଦିଆଯିବା ସଙ୍ଗେ ସଙ୍ଗେ ଅଧିକ ସଂଖ୍ୟକ ଚିନ୍ତାମୂଳକ ପ୍ରଶ୍ନ ସନ୍ନିବେଶିତ କରାଯାଇଛି ।

ପୁସ୍ତକଟିକୁ ତ୍ରୁଟିଶୂନ୍ୟ କରିବାର ସମସ୍ତ ଉଦ୍ୟମ କରାଯାଇଥିବା ସତ୍ତ୍ୱେ, ଯଦି ଏଥିରେ କୌଣସି ତ୍ରୁଟି ପରିଲକ୍ଷିତ ହୁଏ, ସେଥିପ୍ରତି କର୍ତ୍ତୃପକ୍ଷଙ୍କ ଦୃଷ୍ଟି ଆକର୍ଷଣ କରାଗଲେ ପରବର୍ତ୍ତୀ ସଂସ୍କରଣରେ ତାହାର ସଂଶୋଧନ କରାଯିବ ।

ଆଶା କରୁ ପୁସ୍ତକଟି ଶିକ୍ଷକ ଶିକ୍ଷୟିତ୍ରୀଙ୍କ ଅଧ୍ୟାପନା କାର୍ଯ୍ୟରେ ସହାୟକ ହେବ ।

ଲେଖକମଣ୍ଡଳୀ

ସୂଚୀ

ବିଷୟ		ପୃଷ୍ଠା
ପ୍ରଥମ ଅଧ୍ୟାୟ :	ରେଖା ଓ କୋଣ	1
ଦ୍ୱିତୀୟ ଅଧ୍ୟାୟ :	ତ୍ରିଭୁଜମାନଙ୍କ ସର୍ବସମତା	37
ତୃତୀୟ ଅଧ୍ୟାୟ :	ଚତୁର୍ଭୁଜ	52
ଚତୁର୍ଥ ଅଧ୍ୟାୟ :	କ୍ଷେତ୍ରଫଳ	75
ପଞ୍ଚମ ଅଧ୍ୟାୟ :	ପରିମିତି	86
ଷଷ୍ଠ ଅଧ୍ୟାୟ :	ଅଙ୍କନ	121
ସପ୍ତମ ଅଧ୍ୟାୟ :	ତ୍ରିକୋଣମିତି	145
	ଉତ୍ତରମାଳା	159

ଭାରତର ସମ୍ବିଧାନ

ପ୍ରାକ୍ କଥନ :

ଆମେ ଭାରତବାସୀ ଭାରତକୁ ଏକ ସାର୍ବଭୌମ, ସମାଜବାଦୀ, ଧର୍ମ ନିରପେକ୍ଷ, ଗଣତାନ୍ତ୍ରିକ ସାଧାରଣତନ୍ତ୍ର ରୂପେ ଗଠନ କରିବା ପାଇଁ ଦୃଢ଼ ସଂକଳ୍ପ ନେଇ ଓ ଏହାର ସମସ୍ତ ନାଗରିକଙ୍କୁ

- ସାମାଜିକ, ଅର୍ଥନୈତିକ ଓ ରାଜନୈତିକ ନ୍ୟାୟ ;
- ଚିନ୍ତା, ଅଭିବ୍ୟକ୍ତି, ପ୍ରତ୍ୟୟ, ଧର୍ମୀୟ ବିଶ୍ୱାସ ଏବଂ ଉପାସନାର ସ୍ୱତନ୍ତ୍ରତା;
- ସ୍ଥିତି ଓ ସୁବିଧା ସୁଯୋଗର ସମାନତାର ସୁରକ୍ଷା ପ୍ରଦାନ କରିବାକୁ ତଥା
- ବ୍ୟକ୍ତି ମର୍ଯ୍ୟାଦା ଏବଂ ରାଷ୍ଟ୍ରର ଐକ୍ୟ ଓ ସଂହତି ନିଶ୍ଚିତ କରି ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ

ଭ୍ରାତୃଭାବ ଉତ୍ସାହିତ କରିବାକୁ

ଏହି ୧୯୪୯ ମସିହା ନଭେମ୍ବର ୨୬ ତାରିଖ ଦିନ

ଆମର ସଂବିଧାନ ପ୍ରଣୟନ ସଭାରେ ଏତଦ୍ୱାରା

ଏହି ସମ୍ବିଧାନକୁ ଗ୍ରହଣ ଓ ପ୍ରଣୟନ କରୁଅଛୁ ଏବଂ ଆମ ନିଜକୁ ଅର୍ପଣ କରୁଅଛୁ ।

ଚତୁର୍ଥ ଅଧ୍ୟାୟ (କ)

୫୧(କ) ଧାରା : ମୌଳିକ କର୍ତ୍ତବ୍ୟ

ଭାରତର ପ୍ରତ୍ୟେକ ନାଗରିକଙ୍କର କର୍ତ୍ତବ୍ୟ -

(କ) ସମ୍ବିଧାନକୁ ମାନି ଚଳିବା ଏବଂ ଏହାର ଆଦର୍ଶ ଓ ଅନୁଷ୍ଠାନମାନଙ୍କୁ ଏବଂ ଜାତୀୟ ପତାକା ଓ ଜାତୀୟ ସଙ୍ଗୀତକୁ ସମ୍ମାନ ପ୍ରଦର୍ଶନ କରିବା;

(ଖ) ଯେଉଁସବୁ ମହନୀୟ ଆଦର୍ଶ ଆମ ଜାତୀୟ ସ୍ୱାଧୀନତା ସଂଗ୍ରାମକୁ ଅନୁପ୍ରାଣିତ କରିଥିଲା, ତାହାକୁ ସ୍ମରଣ ଓ ଅନୁସରଣ କରିବା;

(ଗ) ଭାରତର ସାର୍ବଭୌମତ୍ୱ, ଏକତା ଓ ସଂହତି ବଜାୟ ଏବଂ ସୁରକ୍ଷିତ ରଖିବା;

(ଘ) ଦେଶର ପ୍ରତିରକ୍ଷା କରିବା ଓ ଆବଶ୍ୟକ ସ୍ଥଳେ ଜାତୀୟ ସେବା ପ୍ରଦାନ କରିବା;

(ଙ) ଧର୍ମଗତ, ଭାଷାଗତ ଏବଂ ଆଞ୍ଚଳିକ କିମ୍ବା ଗୋଷ୍ଠୀଗତ ବିଭିନ୍ନତାକୁ ଅତିକ୍ରମ କରି ଭାରତର ଜନସାଧାରଣଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଐକ୍ୟ ଓ ଭ୍ରାତୃଭାବ ପ୍ରତିଷ୍ଠା କରିବା ଏବଂ ନାରୀଜାତିର ମର୍ଯ୍ୟାଦାହାନୀସୂଚକ ବ୍ୟବହାର ପରିତ୍ୟାଗ କରିବା;

(ଚ) ଆମର ସଂସ୍କୃତିର ମୂଲ୍ୟବାନ ଐତିହ୍ୟକୁ ସମ୍ମାନ ପ୍ରଦର୍ଶନ ଓ ସଂରକ୍ଷଣ କରିବା;

(ଛ) ଅରଣ୍ୟ, ହ୍ରଦ, ନଦୀ, ବନ୍ୟପ୍ରାଣୀ ସମେତ ପ୍ରାକୃତିକ ପରିବେଶର ସୁରକ୍ଷା ଓ ଉନ୍ନତି କରିବା ଏବଂ ଜୀବଜଗତ ପ୍ରତି ଅନୁକମ୍ପା ପ୍ରଦର୍ଶନ କରିବା;

(ଜ) ବୈଜ୍ଞାନିକ ମନୋଭାବ, ମାନବବାଦ ଏବଂ ଅନୁସନ୍ଧିତ୍ସା ଓ ସଂସ୍କାର ମନୋଭାବ ପୋଷଣ କରିବା;

(ଝ) ସର୍ବସାଧାରଣ ସମ୍ପତ୍ତିର ସୁରକ୍ଷା କରିବା ଓ ହିଂସା ପରିତ୍ୟାଗ କରିବା;

(ଞ) ବ୍ୟକ୍ତିଗତ ଓ ସମଷ୍ଟିଗତ କାର୍ଯ୍ୟାବଳୀର ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଉତ୍କର୍ଷ ସାଧନ କରିବା, ଯାହା ଦ୍ୱାରା ଆମ ଦେଶ ପ୍ରଚେଷ୍ଟା ଓ କୃତିତ୍ୱର ଉଚ୍ଚତର ସୋପାନକୁ ଅବିରତ ଉନ୍ନତି କରିପାରିବ;

(ଟ) ମାତା ବା ପିତା ବା ଅଭିଭାବକ, ତାଙ୍କର ଛଅ ବର୍ଷରୁ ଚଉଦ ବର୍ଷ ବୟସ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସନ୍ତାନ ବା ପାଳିତଙ୍କୁ ଶିକ୍ଷାଲାଭର ସୁଯୋଗ ଯୋଗାଇ ଦେବା ।

ପ୍ରଥମ ଅଧ୍ୟାୟ

ରେଖା ଓ କୋଣ

(LINES AND ANGLES)

1.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ଆମେ ଯାହାକିଛି ଦେଖୁ ତାହାର କିଛି ନା କିଛି ଆକୃତି ଥାଏ । ପତ୍ର, ଫୁଲ, ଫଳ, ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାର ସ୍ଫଟିକ- ଏ ସମସ୍ତ ପଦାର୍ଥ ବହୁବିଧ ଆକୃତିର ପରିପ୍ରକାଶ । ଏକାଧିକ ଆକୃତିର ଶୃଙ୍ଖଳିତ ସଂଯୋଜନା ଫଳରେ ସୌନ୍ଦର୍ଯ୍ୟ ବହୁଗୁଣିତ ହୋଇଥାଏ । ବିଭିନ୍ନ ପଦାର୍ଥର ଆକୃତିଗତ ସାଦୃଶ୍ୟ ଓ ବୈସାଦୃଶ୍ୟ ମନୁଷ୍ୟର କୌତୁହଳ ପ୍ରବଣ ମନକୁ ଅନାଦି କାଳରୁ ଆଚ୍ଛନ୍ନ କରି ଆସିଛି। ଆକୃତି-ସଚେତନତା କେବଳ ମଣିଷର ବିଶେଷତ୍ୱ ନୁହେଁ, ଏହା ଜୀବଜନ୍ତୁଙ୍କର ମଧ୍ୟ ପ୍ରବୃତ୍ତିଗତ । ବାୟାଚଢ଼େଇର ଦୁଇ ଥାକିଆ ଅଦ୍ଭୁତ ବସା, ବୁଢ଼ିଆଣିର ଜାଲ, ମହୁଫେଣାର ସୁସଂଯୋଜିତ କୋଷିକା - ଏସବୁ ଉଦାହରଣରୁ ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ହୁଏ । ପ୍ରବୃତ୍ତିଗତ ଆକୃତି-ସଚେତନତାର ଉପଯୋଗ କରି ମନୁଷ୍ୟ ନିଜର ସଭ୍ୟତା ଓ ଜ୍ଞାନର ଉତ୍କର୍ଷ ସାଧନ କରି ପାରିଛି ।

ଆକୃତିଗତ ଜ୍ଞାନର ପରିମାର୍ଜନା ଫଳରେ ହିଁ ଜ୍ୟାମିତି ଶାସ୍ତ୍ରର ଉଦ୍ଭବ ହୋଇଛି । ଯାଯାବର ଅବସ୍ଥାରୁ ଓହରି ଆସି କୃଷିକର୍ମକୁ ଆଦରି ନେବା ପରେ ମନୁଷ୍ୟ ସ୍ଥାୟୀ ବସତି ସ୍ଥାପନ କଲା । ଚାଷଜମିର ଆକାର ନିର୍ଦ୍ଧାରଣ, ରାସ୍ତା ଓ ବାସଗୃହ ନିର୍ମାଣରେ ପ୍ରକୃତିରୁ ଆହରଣ କରିଥିବା ଆକୃତିଗତ ଜ୍ଞାନର ଉପଯୋଗ ହେଲା । ପରିଣାମ ସ୍ୱରୂପ ଜ୍ଞାନରାଜ୍ୟର ଏକ ବିସ୍ତୃତ ପରିସର ଉନ୍ମୁକ୍ତ ହେଲା ଓ ତାହା ହେଉଛି ଜ୍ୟାମିତି ଶାସ୍ତ୍ର । **'ଜ୍ୟାମିତି'** ଶବ୍ଦଟିର ଅର୍ଥରୁ ଏକଥା ସ୍ପଷ୍ଟ ହୁଏ । 'ଜ୍ୟା'ର ଅର୍ଥ ପୃଥିବୀ ଓ 'ମିତି'ର ଅର୍ଥ ମାପ । **'Geometry'** ଶବ୍ଦଟି ମଧ୍ୟ ଦୁଇଟି ଗ୍ରୀକ୍ ଶବ୍ଦ Geo (ପୃଥିବୀ) ଓ Metron (ମାପ)ରୁ ସୃଷ୍ଟି ହୋଇଛି ।

ଜମି ମାପ କରିବାର ଆବଶ୍ୟକତାରୁ ଜ୍ୟାମିତିର ସୃଷ୍ଟି । ମାନବ ସଭ୍ୟତାର ଅଗ୍ରଗତି ସହିତ ଜ୍ୟାମିତି ଅଭିବୃଦ୍ଧି ଜଡ଼ିତ ।

ଜ୍ୟାମିତିର ବିକାଶ ସାଧନ କରିଥିବା ପ୍ରାଚୀନତମ ସଭ୍ୟତା ହେଉଛି ମିଶରୀୟ ସଭ୍ୟତା । ସେଠିକାର ବୃହଦାକାର ପିରାମିଡ୍ ଗୁଡ଼ିକ ଉନ୍ନତ ଜ୍ୟାମତି ଜ୍ଞାନର ନିଦର୍ଶନ । ବୈଦିକ ଯୁଗରେ ଭାରତୀୟ ଋଷିଗଣ ଯଜ୍ଞକୁଣ୍ଡ, ପୂଜାବେଦୀ ଆଦିର ନିର୍ମାଣ କାର୍ଯ୍ୟରେ ବିଭିନ୍ନ ଜ୍ୟାମିତିକ ସୂତ୍ରର ପ୍ରୟୋଗ କରୁଥିଲେ । ଆନୁମାନିକ ଖ୍ରୀଷ୍ଟପୂର୍ବ ୪00 ରୁ ଖ୍ରୀଷ୍ଟପୂର୍ବ 500 ମଧ୍ୟରେ ଭାରତରେ ରଚିତ **'ଶୁଲ୍‌ବ ସୂତ୍ର'** ଏକ ଜ୍ୟାମିତି ଶାସ୍ତ୍ର । ଶୁଲ୍‌ବ ଅର୍ଥାତ୍ ରଜ୍ଜୁ ଦ୍ୱାରା ଜ୍ୟାମିତିକ ମାପ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ସୂତ୍ରକୁ ନେଇ ଏହି ଶାସ୍ତ୍ର ସମୃଦ୍ଧ । ମହେନ୍‌ଜୋଦାରୋ ଓ ହରପ୍ପା ସଭ୍ୟତାର ଧ୍ୱଂସାବଶେଷରୁ ମଧ୍ୟ ବାସଗୃହ, ସ୍ନାନାଗାର ଓ ରାସ୍ତା

ନିର୍ମାଣରେ ଜ୍ୟାମିତିକ ନକ୍‌ସାର ପ୍ରୟୋଗ ଦେଖିବାକୁ ମିଳେ । ପରବର୍ତ୍ତୀ କାଳରେ ଭାସ୍କର, ଆର୍ଯ୍ୟଭଟ୍ଟ, ବ୍ରହ୍ମଗୁପ୍ତ, ମହାବୀର ଆଦି ଭାରତୀୟ ଗଣିତଜ୍ଞଗଣ ଜ୍ୟାମିତି ଶାସ୍ତ୍ରର ଉତ୍କର୍ଷ ସାଧନ କରିଛନ୍ତି ।

ପ୍ରାଥମିକ ଅବସ୍ଥାରେ ଜ୍ୟାମିତିର ସିଦ୍ଧାନ୍ତ ଓ ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକ ମୁଖ୍ୟତଃ ପରୀକ୍ଷାମୂଳକ ଉପାୟରେ ନିର୍ଣ୍ଣିତ ହେଉଥିଲା । ପରୀକ୍ଷା ଓ ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣକୁ ଆଧାର କରି ପଣ୍ଡିତମାନେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସୂତ୍ର ପ୍ରଣୟନ କରୁଥିଲେ । ଜ୍ୟାମିତି ଥିଲା ମୁଖ୍ୟତଃ ଅଭିଜ୍ଞତା ପ୍ରସୂତ ।

କାଳକ୍ରମେ **ଥାଲେସ୍ (Thales), ପିଥାଗୋରାସ୍, ସକ୍ରେଟିସ୍, ପ୍ଲାଟୋ, ଆରିଷ୍ଟଟ୍‌ଲ୍** ଆଦି ଗ୍ରୀକ୍ ବିଦ୍ୱାନ ଗଣ ତର୍କଶାସ୍ତ୍ରର ପ୍ରୟୋଗ କରି ଜ୍ୟାମିତିକ ତଥ୍ୟ ଉନ୍ମୋଚନ କରିବାର ଧାରା ଆରମ୍ଭ କଲେ । ଏ ଦିଗରେ ଗ୍ରୀକ୍ ଗଣିତଜ୍ଞ ଇଉକ୍ଲିଡ୍‌ଙ୍କର ଉଦ୍ୟମ ବିଶେଷ ପ୍ରଣିଧାନ ଯୋଗ୍ୟ । ଖ୍ରୀଷ୍ଟପୂର୍ବ ଚତୁର୍ଥ ଶତାବ୍ଦୀରେ ରଚିତ ଓ ତେରଖଣ୍ଡରେ ବିଭକ୍ତ **ଏଲିମେଣ୍ଟ୍‌ସ୍ (Elements)** ଗ୍ରନ୍ଥରେ ସମୁଦାୟ ଚାରିଶହ ପଞ୍ଚଷଠି ଟି ଉପପାଦ୍ୟ ସନ୍ନିବେଶିତ କରି ଇଉକ୍ଲିଡ୍ ପ୍ରତିପାଦନ କରିବାକୁ ଚେଷ୍ଟା କଲେ ଯେ ଅଳ୍ପ କେତେଗୋଟି ତଥ୍ୟକୁ ସ୍ୱୀକାର କରିନେଲେ ବାକି ସମସ୍ତ ସିଦ୍ଧାନ୍ତକୁ ତର୍କ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରତିପାଦନ କରି ହେବ । ତାଙ୍କର ଏହି ପ୍ରଚେଷ୍ଟା ଜ୍ୟାମିତି ଶାସ୍ତ୍ର ପାଇଁ ଏକ ଯୁଗାନ୍ତକାରୀ ପଦକ୍ଷେପ ଥିଲା । ପରୀକ୍ଷାମୂଳକ ତଥ୍ୟ ଆହରଣ ଅପେକ୍ଷା ତତ୍ତ୍ୱ ନିରୂପଣର ମାର୍ଗ ପ୍ରଶସ୍ତ ହେଲା । ତେଣୁ **ଇଉକ୍ଲିଡ୍‌ଙ୍କୁ ଯଥାର୍ଥରେ ଜ୍ୟାମିତିର ଜନକ** ଆଖ୍ୟା ଦିଆଯାଏ । ତାଙ୍କ ନାମାନୁଯାୟୀ **'ଇଉକ୍ଲିଡୀୟ ଜ୍ୟାମିତି' (Euclidean Geometry)** ନାମ ପ୍ରଚଳିତ ।

ଇଉକ୍ଲିଡ୍‌ଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରଣିତ ଜ୍ୟାମିତିରେ କେତେକ ତାର୍କିକ ଅସଂଗତି ରହିଥିବା କଥା **ବିଖ୍ୟାତ ଦାର୍ଶନିକ ଓ ଗଣିତଜ୍ଞ ବର୍ଟ୍ରାଣ୍ଡ ରସେଲ୍ (Bertrand Russell) ତାଙ୍କର Mathematics and Metaphysics** ପ୍ରବନ୍ଧରେ ଦର୍ଶାଇ ଦେବା ପରେ ଜ୍ୟାମିତିକୁ ତ୍ରୁଟିମୁକ୍ତ କରି ଏକ ବଳିଷ୍ଠ ତର୍କସମ୍ମତ ଭିତ୍ତିଭୂମିରେ ପ୍ରତିଷ୍ଠିତ କରିବାର ପ୍ରଚେଷ୍ଟା କରାଗଲା । ଏଥିପାଇଁ ମୁଖ୍ୟଭୂମିକା ଗ୍ରହଣ କରିଥିବା ଦୁଇଜଣ ଗଣିତଜ୍ଞ ହେଉଛନ୍ତି ଆମେରିକାର **ଜର୍ଜଡେଭିଡ୍ ବିର୍‌କଫ୍ (George David Birkhoff)** ଓ ଜର୍ମାନୀର **ଡେଭିଡ୍ ହିଲ୍‌ବର୍ଟ (David Hilbert)** । ବିର୍‌କଫ୍‌ଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ପରିମାର୍ଜିତ ଜ୍ୟାମିତି ବିଦ୍ୟାଳୟ ସ୍ତର ପାଇଁ ଅଧିକ ଉପଯୁକ୍ତ । ଏହା ତାଙ୍କର 1932 ମସିହାର ନିବନ୍ଧ **'A set of postulates for plane - geometry based on scale and protractor'** ଉପରେ ଆଧାରିତ ।

ଆଧୁନିକ ଜ୍ୟାମିତି ଉଭୟ ତାତ୍ତ୍ୱିକ ଓ ପ୍ରୟୋଗାତ୍ମକ ଦୃଷ୍ଟିରୁ ବହୁତ ସମୃଦ୍ଧ । ଏହାର ତଥ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ଅଭିଜ୍ଞତା ଭିତ୍ତିକ ଚିତ୍ର ମାଧ୍ୟମରେ ଉପସ୍ଥାପନ କରାଯାଉଥିଲେ ମଧ୍ୟ ସଂଜ୍ଞା ଓ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ସମ୍ବଳିତ ତତ୍ତ୍ୱକୁ ସମଗ୍ର ପ୍ରକାର ଆଧୁନିକ ଗଣିତର ଭାଷା ଅର୍ଥାତ୍ **ସେଟ୍** (Set) ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶିତ କରାଯାଏ । ଫଳରେ ଉଚ୍ଚତର ଗଣିତ ଅଧ୍ୟୟନ ନିମନ୍ତେ ଏକ ବଳିଷ୍ଠ ଭିତ୍ତିଭୂମି ପ୍ରସ୍ତୁତ ହୁଏ । ଆମେ ବିଦ୍ୟାଳୟ ସ୍ତରରେ ପଢୁଥିବା ଜ୍ୟାମିତି **ଇଉକ୍ଲିଡ଼ୀୟ ଜ୍ୟାମିତି ବା ସମତଳ ଜ୍ୟାମିତି** ନାମରେ ପରିଚିତ ।

1.2 ମୌଳିକ ଅବବୋଧ – ଏକ ପୁନରାବୃତ୍ତି (Fundamental Concepts - a Recapitulation) :

ପ୍ରତ୍ୟେକ ପାଠରେ କେତେକ ବିଶେଷ ପ୍ରକାର ଶବ୍ଦ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଅର୍ଥରେ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ । ସେହି ଶବ୍ଦଗୁଡ଼ିକୁ **'ପଦ' (term)** କୁହାଯାଏ । ପଦଗୁଡ଼ିକ ଆମର ଦୈନନ୍ଦିନ ଭାଷାରୁ ସଂଗୃହିତ ହୋଇଥିଲେ ମଧ୍ୟ ଆମେ ସେମାନଙ୍କର ଭାଷାଗତ ଅର୍ଥକୁ ବିଚାର କରିବା ପରିବର୍ତ୍ତେ ପାଠ ଦ୍ୱାରା ନିର୍ଦ୍ଧାରିତ ଅର୍ଥକୁ ହିଁ ଗ୍ରହଣ କରୁ ।

ଜ୍ୟାମିତି ଶାସ୍ତ୍ର ଅନ୍ତର୍ଗତ ପଦଗୁଡ଼ିକ ଦୁଇ ପର୍ଯ୍ୟାୟଭୁକ୍ତ – **ସଂଜ୍ଞାବିହୀନ ପଦ ଓ ସଂଜ୍ଞାକୃତ ପଦ** । ସଂଜ୍ଞାବିହୀନ ପଦ ହେଲେ **ବିନ୍ଦୁ, ରେଖା ବା ସରଳରେଖା** (ଏକ ଅର୍ଥରେ ବ୍ୟବହୃତ) ଓ **ସମତଳ** । ଏହି ତିନୋଟି ପଦ ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ

ସମସ୍ତ ପଦ ସଂଜ୍ଞାକୃତ । ଅର୍ଥନିରୂପକ ବାକ୍ୟକୁ **'ସଂଜ୍ଞା'** କୁହାଯାଏ । ଗୋଟିଏ ଅଜଣା ପଦର ଅର୍ଥ ପୂର୍ବରୁ ଜଣାଥିବା ପଦ ମାଧ୍ୟମରେ ନିରୂପିତ ହୁଏ । ତେଣୁ ସଂଜ୍ଞା ନିରୂପଣ ପାଇଁ ଆମ ପାଖରେ ପର୍ଯ୍ୟାପ୍ତ ସଂଖ୍ୟକ **'ଜଣାପଦ'** ବା **'ମୌଳିକ ପଦ'** ଥିବା ଆବଶ୍ୟକ । ଜ୍ୟାମିତିରେ ବ୍ୟବହୃତ ସମସ୍ତ ପଦର ଅର୍ଥ ବା ସଂଜ୍ଞା ନିରୂପଣ ପାଇଁ ବିନ୍ଦୁ, ରେଖା ଓ ସମତଳ ଏହି ତିନୋଟି ମୌଳିକ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟାପ୍ତ । ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ଏହି ତିନୋଟି ସଂଜ୍ଞାବିହୀନ ପଦର ପରିଚୟ ବିଭିନ୍ନ ଉଦାହରଣ ମାଧ୍ୟମରେ ଦିଆଯାଇଛି । ପରୀକ୍ଷା ନିରୀକ୍ଷା ମାଧ୍ୟମରେ ଉପଲବ୍ଧ ଅନୁଭୂତିକୁ ଆଧାର କରି ସେମାନଙ୍କର କେତେକ ଧର୍ମକୁ **ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ (Axiom)** ଆଖ୍ୟା ଦେଇ ମାନି ନିଆଯାଇଛି ।

ବିନ୍ଦୁ, ରେଖା ଓ ସମତଳ – ଏଗୁଡ଼ିକ ସଂଜ୍ଞାବିହୀନ ପଦ ହୋଇଥିବାରୁ ଏମାନଙ୍କର ପରିଚୟ କୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଉଦାହରଣରେ ସୀମିତ ନୁହେଁ ।

ଆମେ ଏ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଜାଣିଥିବା ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ସମୂହର ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ପୁନରାଲୋଚନା କରିବା ।

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ – 1 : ରେଖା ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସମାହର ବା ସେଟ୍ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ (1) : L ନାମକ ଏକ ରେଖାର P ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ଆମେ ସେଟ୍ ଭାଷାରେ ଲେଖି ପାରିବା '$P \in L$' କିମ୍ବା 'P, L' ରେଖାର ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଅଥବା ନିମ୍ନୋକ୍ତ ଯେକୌଣସି ଗୋଟିଏ ବ୍ୟବହାର ଉପଯୋଗୀ ନିର୍ଦ୍ଧାରିତ ବାକ୍ୟ ପ୍ରୟୋଗ କରି ପାରିବା : 'L ରେଖା P ବିନ୍ଦୁକୁ ଧାରଣ କରେ'

'L ସରଳ ରେଖା P ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ।

'L, P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବା ମଧ୍ୟଦେଇ ଯାଇଥିବା ଏକ ସରଳ ରେଖା',

'P, L ସରଳ ରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ' । ଏ ସମସ୍ତ ବାକ୍ୟର ଏକ ମାତ୍ର ଅର୍ଥ ହେଉଛି $P \in L$ ଅଥବା P, L ରେଖାର ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ଅଟେ । ଏହା ବ୍ୟତୀତ ବାକ୍ୟ ଗୁଡ଼ିକର ଅନ୍ୟ କୌଣସି ଶବ୍ଦଗତ ଅର୍ଥ ବିଚାର ଯୋଗ୍ୟ ନୁହେଁ ।

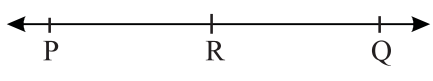
ସରଳ ରେଖା ବିଷୟରେ ଅଧିକ ସୂଚନା ପରିବର୍ତ୍ତୀ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟମାନଙ୍କରୁ ମିଳିବ ।

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ –2 . ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଗୋଟିଏ ଏବଂ କେବଳ ମାତ୍ର ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଅବସ୍ଥିତ ।

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟଟିର ତାତ୍ପର୍ଯ୍ୟ ହେଉଛି – ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ ନିଶ୍ଚିତ ଭାବରେ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସରଳ ରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେବେ ।

ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ P ଓ Q ଯଦି L ସରଳ ରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ହୁଅନ୍ତି ତେବେ L କୁ ଆମେ $\overleftrightarrow{PQ}$ ସଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା ନାମିତ କରିବା । **'$\overleftrightarrow{PQ}$ କୁ PQ ରେଖା (ବା ସରଳ ରେଖା)'** ବୋଲି ପଢ଼ାଯାଏ । $\overleftrightarrow{PQ}$ ର ଚିତ୍ର ନିମ୍ନରେ ଦିଆଗଲା । $\overleftrightarrow{PQ}$ ଉପରିସ୍ଥ ଅନ୍ୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁ R ହେଲେ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ-2 ରୁ ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ହୁଏ ଯେ $\overleftrightarrow{PR}$, $\overleftrightarrow{RP}$, $\overleftrightarrow{RQ}$, $\overleftrightarrow{QR}$, $\overleftrightarrow{PQ}$ ତଥା $\overleftrightarrow{QP}$ –

ଏ ସମସ୍ତ ଗୋଟିଏ ରେଖାର ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ନାମ ଅଟନ୍ତି ।



(ଚିତ୍ର 1.1)

ଏକରେଖୀ ଓ ନୈକରେଖୀ ବିନ୍ଦୁ (Collinear and Non-collinear Points) :

ସଂଜ୍ଞା : - ତିନି ବା ତାହାଠାରୁ ଅଧିକ ସଂଖ୍ୟକ ବିନ୍ଦୁ ଯଦି ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ସେମାନଙ୍କୁ ଏକରେଖୀ (ବା ସରଳ ରୈଖିକ) ବିନ୍ଦୁ (Collinear Points) କୁହାଯାଏ ।

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ -2 ଅନୁଯାୟୀ ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ ସର୍ବଦା ଏକରେଖୀ ଅଟନ୍ତି । ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ଏକାଧିକ ସରଳରେଖାରେ ରହିପାରେ - ଏକଥା ପରବର୍ତ୍ତୀ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟମାନଙ୍କରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ହେବ ।

ସଂଜ୍ଞା : ଯେଉଁସବୁ ବିନ୍ଦୁ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ନୁହଁନ୍ତି, ସେମାନଙ୍କୁ ନୈକରେଖୀ (ବା ଅଣସରଳରୈଖିକ) ବିନ୍ଦୁ (Non-collinear Points) କୁହାଯାଏ ।

ଦୁଇଟି ସରଳରେଖାର ଛେଦ (Intersection of two lines) :

ଦୁଇଟି ସେଟ୍ A ଓ B ର ଛେଦ ବା $A \cap B$ କହିଲେ ଆମେ A ଓ B ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟର ସାଧାରଣ ଉପାଦାନ ଅର୍ଥାତ୍ ଉଭୟ A ଓ B ରେ ଥିବା ଉପାଦାନମାନଙ୍କର ସେଟ୍‌କୁ ବୁଝିଥାଉ । ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଦୁଇଟି ସମ୍ଭାବନା ଥାଏ :

(i) $A \cap B = \phi$, ଅର୍ଥାତ୍ A ଓ B ର କୌଣସି ସାଧାରଣ ଉପାଦାନ ନାହାଁନ୍ତି;

(ii) $A \cap B \neq \phi$, ଅର୍ଥାତ୍ A ଓ B ର ଏକ ବା ଏକାଧିକ ସାଧାରଣ ଉପାଦାନ ଅଛନ୍ତି ।

ସରଳରେଖାଗୁଡ଼ିକ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍ ହୋଇଥିବାରୁ ଆମେ ସେମାନଙ୍କର ଛେଦ ବିଷୟ ବିଚାରକୁ ନେବା । ମନେକର L_1 ଓ L_2 ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ସରଳରେଖା । ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ମଧ୍ୟ ପୂର୍ବ ଭଳି ଦୁଇଟି ସମ୍ଭାବନା ରହିଛି :

(i) $L_1 \cap L_2 = \phi$, ଅର୍ଥାତ୍ ରେଖାଦ୍ୱୟର କୌଣସି ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ବା ଛେଦବିନ୍ଦୁ (Point of Intersection) ନାହିଁ । ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସେମାନଙ୍କୁ **ଅଣଛେଦୀ ରେଖା (Non-intersecting lines)** କୁହାଯାଏ ।

(ii) $L_1 \cap L_2 \neq \phi$, ଅର୍ଥାତ୍ ରେଖାଦ୍ୱୟର ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ବା ଛେଦବିନ୍ଦୁ ଅଛି । ତେବେ ସାଧାରଣ ସେଟ୍‌ଭଳି ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ L_1 ଓ L_2 ର ଏକାଧିକ ସାଧାରଣବିନ୍ଦୁ ରହିବା ସମ୍ଭବ କି ?

ଆମେ ବର୍ତ୍ତମାନ ସୁଦ୍ଧା ଗ୍ରହଣ କରିଥିବା ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଦୁଇଟି ସାହାଯ୍ୟରେ ଏହି ପ୍ରଶ୍ନର ଉତ୍ତର ପରବର୍ତ୍ତୀ 'ଉପପାଦ୍ୟ'ରୁ ପାଇ ପାରିବା । **(ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଓ ସଂଜ୍ଞାକୁ ଭିତ୍ତି କରି ତର୍କ ବା ଯୁକ୍ତି ମାଧ୍ୟମରେ ଯେଉଁ କଥା ପ୍ରତିପାଦନ ବା ପ୍ରମାଣ କରାଯାଏ, ତାହାକୁ ଉପପାଦ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।)**

ଉପପାଦ୍ୟ - 1

ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ସରଳରେଖାର ଏକାଧିକ ଛେଦ ବିନ୍ଦୁ ରହିବା ଅସମ୍ଭବ । (ଅର୍ଥାତ୍ ସେମାନେ ପରସ୍ପରକୁ ଆଦୌ ଛେଦ କରନ୍ତି ନାହିଁ କିମ୍ବା ପରସ୍ପରକୁ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ।)

(Two distinct lines can not have more than one point in common)

ଦତ୍ତ : L_1 ଓ L_2 ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ସରଳ ରେଖା ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : L_1 ଓ L_2 ର ଗୋଟିଏ ରୁ ଅଧିକ ଛେଦବିନ୍ଦୁ ନାହିଁ ।

ପ୍ରମାଣ : ମନେକର ପ୍ରାମାଣ୍ୟ ଉକ୍ତିଟି ସତ୍ୟ ନୁହେଁ ।

$\therefore$ L_1 ଓ L_2 ର ଅତିକମ୍‌ରେ ଦୁଇଟି ଛେଦବିନ୍ଦୁ ରହିଛି । ସେ ଦୁଇଟି P ଓ Q ହେଉ ।

ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ P ଓ Q ମଧ୍ୟଦେଇ କେବଳ ମାତ୍ର ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା $\overleftrightarrow{PQ}$ ଅବସ୍ଥିତ । (ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ - 2)

$\therefore$ $L_1 = \overleftrightarrow{PQ} = L_2$ (ଅର୍ଥାତ୍ L_1 ଓ L_2, $\overleftrightarrow{PQ}$ ଠାରୁ ଭିନ୍ନ ନୁହଁନ୍ତି)

ମାତ୍ର ଏହା ଅସମ୍ଭବ, କାରଣ ଦତ୍ତ ଅଛି, L_1 ଓ L_2 ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ସରଳରେଖା, ଅର୍ଥାତ୍ $L_1 \neq L_2$ ।

ତେଣୁ ପ୍ରମାଣ ଆରମ୍ଭରୁ ଆମେ ମାନି ନେଇଥିବା ଉକ୍ତିଟି ମିଥ୍ୟା ଅଟେ ।

$\therefore$ L_1 ଓ L_2 ର ଏକାଧିକ ଛେଦବିନ୍ଦୁ ରହିବା ଅସମ୍ଭବ ।(ପ୍ରମାଣିତ)

ମନ୍ତବ୍ୟ : ଉପପାଦ୍ୟଟିର ପ୍ରମାଣରେ ଯେଉଁ ପ୍ରକାର ଯୁକ୍ତିର ପ୍ରୟୋଗ କରାଗଲା ତାହାକୁ **'ଅସମ୍ଭବାୟନ ସୂତ୍ର' (Principle of reductio ad absurdum)** କୁହାଯାଏ । ଯଦି ଗୋଟିଏ ଉକ୍ତିକୁ ମିଛ ବୋଲି ମାନିନେଲେ ଆମେ ଅସମ୍ଭବ ପରିସ୍ଥିତିର ସମ୍ମୁଖୀନ ହେଉ, ତେବେ ମାନିବାକୁ ହେବ ଯେ ଉକ୍ତିଟି ସତ୍ୟ ଅଟେ । ଯୁକ୍ତିମୂଳକ ଜ୍ୟାମିତିକ ପ୍ରମାଣରେ ଅସମ୍ଭବାୟନ ସୂତ୍ରର ବହୁଳ ପ୍ରୟୋଗ ଦେଖିବାକୁ ମିଳେ ।

ସମତଳ (Plane) : ଗୋଟିଏ ଇଟାର ପୃଷ୍ଠ, ପୋଖରୀର ଜଳପୃଷ୍ଠ, ଶ୍ରେଣୀଗୃହରେ ଥିବା କଳାପଟାର ପୃଷ୍ଠ, ପକ୍କାଘରର ଚଟାଣ ଆଦିରୁ ସମତଳର ସୀମିତ ଧାରଣା ମିଳେ । ଜ୍ୟାମିତିରେ ଆମର ବିଚାର ପରିସର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ସମତଳ କୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସୀମା ଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ ନୁହେଁ । ଏହା ସୀମାହୀନ ଭାବରେ ବିସ୍ତୃତ ବୋଲି ବିଚାର କରାଯାଏ । ସମତଳ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆମର ପ୍ରାରମ୍ଭିକ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ହେଉଛି :

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ -3 : ସମତଳ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍ ଅଟେ ।

ମନେକର A, B, C ଗୋଟିଏ ସମତଳରେ ଥିବା ବିନ୍ଦୁ । ସମତଳର ନାମ P ଦିଆଯାଉ । ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଅନୁଯାୟୀ A, B, C ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ P ସେଟ୍‌ର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଉପାଦାନ । ଏହି କଥାକୁ ଆମେ ନିମ୍ନୋକ୍ତ ଯେକୌଣସି ବାକ୍ୟ ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟକ୍ତ କରିପାରିବା :

A, B, C ବିନ୍ଦୁ P ସମତଳରେ (ବା P ସମତଳ ଉପରେ) ଅବସ୍ଥିତ,

P ସମତଳ A, B, C ମଧ୍ୟଦେଇ ଅବସ୍ଥିତ, P ସମତଳ A, B, C ବିନ୍ଦୁକୁ ଧାରଣ କରୁଛି ।

ଏ ସମସ୍ତ ବାକ୍ୟର ଏକମାତ୍ର ଅର୍ଥ ହେଉଛି - $A \in P,\ B \in P,\ C \in P$ ବାକ୍ୟଗୁଡ଼ିକର ଅନ୍ୟ କୌଣସି ପ୍ରକାର ଶବ୍ଦଗତ ଅର୍ଥ ବିଚାର କରାଯାଏ ନାହିଁ ।

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ - 4 : ଗୋଟିଏ ସମତଳରେ ଅନ୍ତତଃ ତିନିଗୋଟି ନୈକରେଖୀ ବିନ୍ଦୁ ଥାଏ ଏବଂ ଯେକୌଣସି ତିନିଗୋଟି ନୈକରେଖୀ ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟଦେଇ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ସମତଳ ଅବସ୍ଥିତ ।

ଟିପ୍ପଣୀ : ଗୋଟିଏ ସମତଳରେ ଅସଂଖ୍ୟ ବିନ୍ଦୁର ଅବସ୍ଥିତି ପରବର୍ତ୍ତୀ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟମାନଙ୍କରୁ ପ୍ରମାଣିତ ହୋଇପାରିବ । ତେଣୁ ମାତ୍ର ତିନିଗୋଟି ନୈକରେଖୀ ବିନ୍ଦୁର ଅବସ୍ଥିତି ସ୍ୱୀକାର କରାଗଲା ।

ସମତଳର ନାମ କରଣ : ଗୋଟିଏ ସମତଳର ନାମକରଣ ସେଥିରେ ଥିବା ଯେ କୌଣସି ତିନିଗୋଟି ନୈକରେଖୀ ବିନ୍ଦୁ ସାହଯ୍ୟରେ କରାଯାଏ ।

A, B, C ଏକ ସମତଳସ୍ଥ ଯେକୌଣସି ତିନୋଟି ନୈକରେଖୀ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ଆମେ ସମତଳଟିକୁ 'ABC ସମତଳ' (ବା BAC, CAB ସମତଳ) ବୋଲି ନାମିତ କରିବା ।

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ମାଧ୍ୟମରେ ସରଳରେଖା ଓ ସମତଳ, ଏ ଦୁଇଟିର ଯେଉଁ ଜ୍ୟାମିତିକ ପରିଚୟ ଆମେ ପାଇଲେ, ତାହା ହେଉଛି – ଉଭୟେ ବିନ୍ଦୁ ମାନଙ୍କର ସେଟ୍ । ତେବେ ଏ ଦୁଇ ପ୍ରକାର ସେଟ୍ ମଧ୍ୟରେ କୌଣସି ସମ୍ପର୍କ ଅଛି କି ? ଯଦି ଅଛି, ତେବେ କେଉଁ ପରିସ୍ଥିତିରେ ଅଛି – ଏ କଥା ପରବର୍ତ୍ତୀ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟରୁ ଜଣାପଡ଼ିବ ।

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ-5: ଏକ ସମତଳସ୍ଥ ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁକୁ ଧାରଣ କରୁଥିବା ସରଳରେଖା ଉକ୍ତ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ : ଯଦି A ଓ B, P- ସମତଳର ଦୁଇଟି ପୃଥିକ୍ ବିନ୍ଦୁ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଅନୁଯାୟୀ $\overleftrightarrow{AB}$ Pସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ, ଅର୍ଥାତ୍ ସରଳରେଖାଟିର ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ P-ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ । ଏହି କଥାକୁ ଆମେ ସେଟ୍ – ଭାଷାରେ ଲେଖି ପାରିବା : $\overleftrightarrow{AB} \subset P$, ଅର୍ଥାତ୍ $\overleftrightarrow{AB}$, P-ସମତଳର ଉପସେଟ୍ ଅଟେ ।

ଦୁଇ ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଦୂରତା; ସରଳରେଖା ଓ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପର୍କ :

ଏ ସମ୍ପର୍କରେ ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ବିଷଦ୍ ଭାଗରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି । ଏଠାରେ କେବଳ ଏ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଜ୍ୟାମିତିରେ ଗ୍ରହଣ କରାଯାଇଥିବା ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟଟି ମନେ ପକାଇବା ।

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ – 6 (ରୁଲର୍ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ) (Ruler Postulate / Axiom)

ଗୋଟିଏ ସମତଳରେ ଥିବା ବିନ୍ଦୁଯୋଡ଼ା ଗୁଡ଼ିକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଅଣରଣାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ, ଯାହାକୁ ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଦୂରତା କୁହାଯାଏ । ଦୂରତାକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ଆମେ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଓ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ ମଧ୍ୟରେ ଏଭଳି ଏକ ସମ୍ପର୍କ ସୃଷ୍ଟି କରି ପାରିବା ଯାହା ଫଳରେ

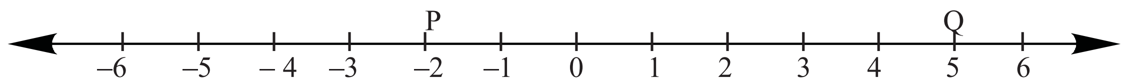
(i) ସରଳରେଖା ଉପରେ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁ ପାଇଁ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁ ନିରୂପଣ କରି ପାରିବା;

(ii) ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟର ଦୂରତା, ସେମାନଙ୍କ ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତରର ପରମମାନ (ଅଣରଣାତ୍ମକ ଅନ୍ତର) ସହ ସମାନ ହେବ।

ଟୀକା :(1) A ଓ B ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଦୂରତାକୁ AB ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ । AB ସରଳ ରେଖାରେ A ଓ B ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ଯଥାକ୍ରମେ a ଓ b ହେଲେ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଅନୁଯାୟୀ $AB = |a - b|$ ଅର୍ଥାତ୍ $a - b$ ର ପରମମାନ ଅଟେ । ତେଣୁ ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ $AB = |a - b| = |b - a| = BA$ ଅଟେ । ସେହିପରି A ଓ B ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ଯଦି ଅଭିନ୍ନ ହୁଅନ୍ତି ତେବେ $AB = 0$ ଅଟେ ।

(2) ଉପରୋକ୍ତ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟଟି 1932 ମସିହାରେ ଆମେରିକୀୟ ଗଣିତଜ୍ଞ **ଜର୍ଜ୍ ଡେଭିଡ୍ ବିର୍‌କଫ୍** ପ୍ରକାଶ କରିଥିଲେ। ଆଗରୁ କୁହାଯାଇଛି ସରଳରେଖା ଏକ ସଂଜ୍ଞା ବିହୀନ ପଦ, ଯାହା କେତେ ଗୁଡିଏ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟର ଅଧିନ । ବ୍ୟାବହାରିକ ପ୍ରୟୋଗ ପାଇଁ ଆମେ ସରଳରେଖାର ଗୋଟିଏ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ନମୁନା ଗ୍ରହଣ କରୁ ଓ ତାହା ହେଉଛି ସ୍କେଲ୍‌ର ସଳଖଧାର (ruler)

ସାହାଯ୍ୟ ରେ ଅଙ୍କିତ ଗୋଟିଏ ସଳଖ ଗାର । ଏହାକୁ ଜ୍ୟାମିତିକ ସରଳରେଖାର ରୂପ ଦେବା ପାଇଁ ତୀରଚିହ୍ନ ସାହାଯ୍ୟରେ ଏହା ଉଭୟ ଦିଗରେ ସୀମାହୀନ ଭାବରେ ବିସ୍ତୃତ ବୋଲି ଧରିନେଉ । ଦୂରତା ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଉପରୋକ୍ତ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟର ପ୍ରୟୋଗ ଆମେ ସାଧାରଣତଃ ସ୍କେଲ୍ ସାହାଯ୍ୟରେ କରିଥାଉ । ଗୋଟିଏ ସ୍କେଲ୍‌ର ଅଂଶାଙ୍କିତ ଧାରର ବ୍ୟବହାର କରି ଆମେ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖାର ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ ନିମ୍ନ ଚିତ୍ରରେ ପ୍ରଦର୍ଶିତ ହେବା ଭଳି ଚିହ୍ନିତ କରୁ :



(ଚିତ୍ର 1.2)

ଦଶମିକ ଭଗ୍ନ ସଂଖ୍ୟା ସାହାଯ୍ୟରେ ମଧ୍ୟ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ ଚିହ୍ନିତ କରାଯାଇ ପାରିବ। ଉପରୋକ୍ତ ପ୍ରକ୍ରିୟାରେ ଆମେ ଦୂରତାର ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଏକକ (ଯଥା ସେଣ୍ଟିମିଟର ବା ମିଲିମିଟର ବା ସେହିଭଳି କିଛି) ବ୍ୟବହାର କରି ଏକ ସରଳରେଖାର ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ ଚିହ୍ନଟ କରୁଥିଲେ ମଧ୍ୟ ଭିନ୍ନଭିନ୍ନ ସରଳରେଖା ପାଇଁ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ଏକକ ବ୍ୟବହାର ପାଇଁ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ - 6 ବାରଣ କରେ ନାହିଁ ।

ଆମେ କହି ପାରିବା : ଭୁବନେଶ୍ୱରରୁ ଫୁଲବାଣୀ ଛଅ ଘଣ୍ଟାର ବାଟ । (ବସ୍‌ରେ ଗଲେ)

ଭୁବନେଶ୍ୱରରୁ ଚେନ୍ନାଇ ଦେଢ଼ଘଣ୍ଟାର ବାଟ । (ଉଡ଼ାଜାହାଜରେ ଗଲେ)

ତେବେ କ'ଣ କହିବା : ଭୁବନେଶ୍ୱରରୁ ଫୁଲବାଣୀ ଦୂର ଆଉ ଚେନ୍ନାଇ ପାଖ ?

ଏ ପ୍ରକାର ବ୍ୟାବହାରିକ ଅସଂଗତି ସୃଷ୍ଟି ନହେବା ପାଇଁ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ରେଖା ପାଇଁ ଦୂରତାର ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଏକକ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ ।

(3) ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ସରଳରେଖା ପାଇଁ ଦୂରତାର ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଏକକ ବ୍ୟବହାର କେବଳ ଯେ ଏକ ବ୍ୟାବହାରିକ ଆବଶ୍ୟକତା, କେବଳ ତାହା ନୁହେଁ । ଆଗକୁ ଏଭଳି ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଆସିବ ଯାହାର ପ୍ରୟୋଗ ପାଇଁ ରେଖା ନିର୍ବିଶେଷରେ ଦୂରତାର ଗୋଟିଏ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଏକକ ବ୍ୟବହାର ପାଇଁ ଆମେ ବାଧ୍ୟ ହେବା । ତେଣୁ ପ୍ରଥମରୁ ଗୋଟିଏ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଏକକ ଚୟନ କରିବା ଉପରେ ଗୁରୁତ୍ୱ ଦିଆଯାଉଛି ।

ଦୂରତାର ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଏକକ ଗ୍ରହଣ କରି ମଧ୍ୟ ଆମେ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଓ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ ମଧ୍ୟରେ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟରେ ବର୍ଣ୍ଣିତ ସମ୍ପର୍କ (ବିନ୍ଦୁ ଗୋଟିକୁ ସଂଖ୍ୟା ଗୋଟିଏ ତଥା ସଂଖ୍ୟା ଗୋଟିକୁ ବିନ୍ଦୁ ଗୋଟିଏ; ଅର୍ଥାତ୍ ଏକ ଏକ ସମ୍ପର୍କ) ବିଭିନ୍ନ ଉପାୟରେ ନିରୂପଣ କରିପାରିବା । **ରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁକୁ ଚିହ୍ନଟ କରୁଥିବା ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାଟିକୁ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ କୁହାଯାଏ ।**

ଦୂରତାର ଏକକ ସ୍ଥିର ରଖି ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିରୂପଣ ପ୍ରକ୍ରିୟା ବଦଳାଇ ଦେଲେ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସିନା ବଦଳିଯାଏ, ମାତ୍ର ଦୂରତା ଅପରିବର୍ତ୍ତିତ ରହେ । ଉଦାହରଣଟିଏ ଦେଖ । ପୂର୍ବ ବର୍ଣ୍ଣିତ ଚିତ୍ରରେ (ଟୀକା - 2) P ଓ Q ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ –2 ଓ 5 ଅଟେ । ଆମେ ଯଦି ବିଧିବଦ୍ଧ ଭାବରେ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ x କୁ $x+2$ ରେ ପରିବର୍ତ୍ତିତ କରିବା ତେବେ P ଓ Q ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ 0 ଓ 7 ହେବ । ମାତ୍ର ଉଭୟ କ୍ଷେତ୍ରରେ $PQ = 7$ (ବା 7 ଏକକ) ଅଟେ ।

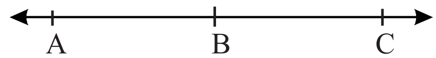
ଦୂରତା ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ରୁଲର୍ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ, ଜ୍ୟାମିତି ଓ ବୀଜଗଣିତ ମଧ୍ୟରେ ଏକ ସମ୍ପର୍କ ସେତୁ । ଏହା ମାଧ୍ୟମରେ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ର ଧର୍ମ ଗୁଡ଼ିକ ସରଳରେଖାର ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ଧର୍ମ ରୂପେ ପ୍ରତିପାଦିତ ହୋଇଥାଏ । ଏ ଦିଗରେ ଅଧିକ ଅଗ୍ରସର ହେବା ପାଇଁ **ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତିତା (Betweenness)** ସମ୍ପର୍କରେ ଆମର ଜ୍ୟାମିତିକ ଅବବୋଧ ସ୍ପଷ୍ଟ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ ।

1.3 ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତିତା (Betweenness) :

ସଂଜ୍ଞା : ତିନୋଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ A, B ଓ C ଯଦି

(i) ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥାନ କରନ୍ତି ଓ

(ii) AB + BC = AC ହୁଏ;



(ଚିତ୍ର 1.3)

ତେବେ B କୁ A ଓ C ର (କିମ୍ବା C ଓ A ର) ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ବିନ୍ଦୁ କହାଯାଏ ।

ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟର ଏ ପ୍ରକାର ଅବସ୍ଥାକୁ ସାଙ୍କେତିକ ଭାଷାରେ A - B - C କିମ୍ବା C - B - A ଭାବରେ ଲେଖାଯାଏ ।

ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତିତାକୁ ଆଧାର କରି ବର୍ତ୍ତମାନ ଆଉ କେତେ ଗୋଟି ସଂଜ୍ଞା ନିରୂପଣ କରିବା ।

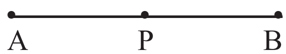
ରେଖାଖଣ୍ଡ (Segment or Line segment) :

ସଂଜ୍ଞା : ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ A, B ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍‌କୁ $\overline{AB}$ ବା $\overline{BA}$ ରେଖାଖଣ୍ଡ' କୁହାଯାଏ ।

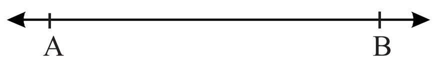
ସେଟ୍ ଭାଷାରେ ଉପରୋକ୍ତ ସଂଜ୍ଞାକୁ ଆମେ ନିମ୍ନମତେ ଲେଖି ପାରିବା :

$\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{P : A–P–B\}$

A ଓ B ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ପ୍ରତିନିଧି ରୂପେ P ବିନ୍ଦୁକୁ ନିଆଯାଇ (ଚିତ୍ର 1.4)



(ଚିତ୍ର 1.4)



(ଚିତ୍ର 1.5)

ସୂତ୍ର ପ୍ରଣାଳୀରେ $\overline{AB}$ ସେଟ୍‌ର ସଂଜ୍ଞା ନିରୂପିତ ହୋଇଛି ।

$\overline{AB}$ କୁ A ଓ B ଦ୍ୱାରା **ନିରୂପିତ ରେଖାଖଣ୍ଡ'** ବା 'A ଓ B ର **ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡ'** ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ । ସଂଜ୍ଞାରୁ ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ହୁଏ ଯେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{BA}$, ଉଭୟ ଗୋଟିଏ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଅଟନ୍ତି ।

ମନ୍ତବ୍ୟ : $\overline{AB} \subset \overleftrightarrow{AB}$; ଅର୍ଥାତ୍ AB ରେଖାଖଣ୍ଡ, AB ସରଳରେଖାର ଏକ ଅଂଶ ଅଟେ । ଉପରିସ୍ଥ ଚିତ୍ର 1.5ରେ $\overline{AB}$ କୁ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଭାବରେ ତଥା $\overleftrightarrow{AB}$ ର ଅଂଶ ଭାବରେ - ଏ ଦୁଇ ପ୍ରକାରରେ ଦେଖାଯାଇଛି । ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ $\overline{AB}$ ର ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ $\overleftrightarrow{AB}$ ରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

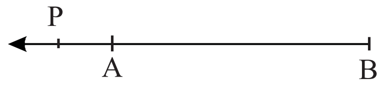
ରେଖାଖଣ୍ଡର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ (End-points of a line segment): A ଓ B କୁ $\overline{AB}$ ର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ ।

ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ (Length of a line segment) : ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଦୂରତାକୁ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।

ତେଣୁ $\overline{AB}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = AB ଅଟେ ।

ରଶ୍ମି ଓ ବିପରୀତ ରଶ୍ମି :

(ଚିତ୍ର 1.6) (କ) $\overrightarrow{AB}$



(ଚିତ୍ର 1.6) (ଖ) $\overrightarrow{BA}$

ଉପରିସ୍ଥ ଚିତ୍ର (କ) ଓ (ଖ) ରେ ଦୁଇଟି ରଶ୍ମି ପ୍ରଦର୍ଶିତ ହୋଇଛି । ସେ ଦୁଇଟି ହେଉଛି $\overrightarrow{AB}$ ବା AB ରଶ୍ମି ଏବଂ $\overrightarrow{BA}$ ବା BA ରଶ୍ମି ।

ଯେକୌଣସି ଗୋଟିଏ ଚିତ୍ରକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରି ଆମେ 'ରଶ୍ମି'ର ଜ୍ୟାମିତିକ ସଂଜ୍ଞା ନିରୂପଣ କରିବା ।

ଚିତ୍ର 1.6 (କ) କୁ ଲକ୍ଷ୍ୟକର । ଏହାର ଗୋଟିଏ ଅଂଶ ହେଉଛି AB ରେଖାଖଣ୍ଡ । ଏଥିରେ ଆହୁରି ଅନେକ ବିନ୍ଦୁ ରହିଛି, ଯାହା $\overline{AB}$ ରେ ନାହିଁ । ସେଭଳି ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ P ଅଟେ । P ଏଭଳି ଭାବରେ ଅବସ୍ଥିତ ହୋଇଛି ଯେ, B ବିନ୍ଦୁଟି A ଓ P ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ବିନ୍ଦୁ ହୋଇ ପାରୁଛି; ଅର୍ଥାତ୍ A - B - P ।

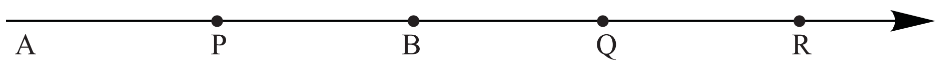
$\overline{AB}$ ଓ $\overline{AB}$ ର ବାହାରେ ଥିବା P ଭଳି ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁକୁ ନେଇ ଚିତ୍ରଟି ଗଠିତ ହୋଇଛି । ଏହାକୁ **AB ରଶ୍ମି' ବା ସଙ୍କେତରେ $\overrightarrow{AB}$ ଲେଖାଯାଏ ।**

ତେଣୁ ସେଟ୍ ଭାଷାରେ AB ରଶ୍ମିର ସଂଜ୍ଞା ହେଉଛି : $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{P : A - B - P\}$

ସେହିପରି $\overrightarrow{BA} = \overline{AB} \cup \{Q : B - A - Q\}$ ବା $\overline{BA} \cup \{Q : B - A - Q\}$

(ଚିତ୍ର 1.6 (ଖ) ଦେଖ । ମନେପକାଅ $\overline{AB} = \overline{BA}$, ଅର୍ଥାତ୍ ଉଭୟର ଅର୍ଥ ଗୋଟିଏ ।) $\overrightarrow{AB}$ ଓ $\overrightarrow{BA}$ ର ସଂଜ୍ଞାରୁ ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ହୁଏ ଯେ $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = \overline{AB}$; ଅର୍ଥାତ୍ **AB ରଶ୍ମି ଓ BA ରଶ୍ମିର ଛେଦ = AB ରେଖାଖଣ୍ଡ ।**

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : (1) ରଶ୍ମିର ସଂଜ୍ଞାରୁ ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ହୁଏ ଯେ ନିମ୍ନସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ



(ଚିତ୍ର 1.7)

$\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AR}$ ଏ ସମସ୍ତ ଗୋଟିଏ ରଶ୍ମିର ହିଁ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ନାମ ଅଟନ୍ତି ।

(2) $\overline{AB} \subset \overrightarrow{AB} \subset \overleftrightarrow{AB}$; ସେହିପରି $\overline{BA} \subset \overrightarrow{BA} \subset \overleftrightarrow{BA}$

$\overline{AB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AB}$ ଅର୍ଥାତ୍ AB ରେଖାଖଣ୍ଡ, AB ରଶ୍ମି ଓ AB ସରଳରେଖା ଏ ସମସ୍ତେ ହେଉଛନ୍ତି ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍; ମାତ୍ର AB ଗୋଟିଏ ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଯାହା ହେଉଛି A ଓ B ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଦୂରତା ।

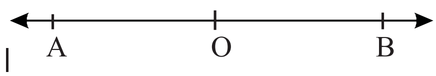
(4) ରଶ୍ମିର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ (Vertex) : A କୁ $\overrightarrow{AB}$ ର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ ।

ସେହିପରି $\overrightarrow{BA}$ ର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ B ଅଟେ । ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁକୁ ଆଦ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ (Initial Point) ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।

ବ୍ୟାବହାରିକ ଭାଷାରେ $\overrightarrow{AB}$ ରଶ୍ମିକୁ A ବିନ୍ଦୁରୁ ଅଙ୍କିତ ଓ B ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟଦେଇ ବିସ୍ତୃତ ରଶ୍ମି' ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।

(5) ବିପରୀତ ରଶ୍ମି (Opposite rays)

ମନେକର A - O-B, ଅର୍ଥାତ୍ O, A ଓ B ର ଏକ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ବିନ୍ଦୁ ।



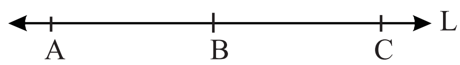
(ଚିତ୍ର 1.8)

ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ $\overrightarrow{OA}$ ଓ $\overrightarrow{OB}$ କୁ ବିପରୀତ ରଶ୍ମି କୁହାଯାଏ ।

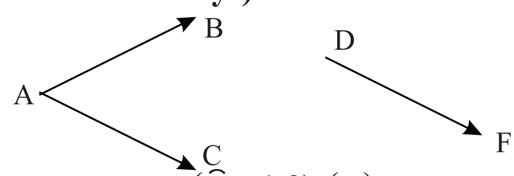
ତେଣୁ ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ $\overrightarrow{OA}$ ଓ $\overrightarrow{OB}$ ବିପରୀତ ରଶ୍ମି ହେଲେ $\overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB} = \overleftrightarrow{AB}$

ଅର୍ଥାତ୍ OA ରଶ୍ମି ଓ OB ରଶ୍ମିର ସଂଯୋଗ AB ସରଳରେଖା ଅଟେ ।

(6) ଏକରେଖୀ ଓ ନୈକରେଖୀ ରଶ୍ମି (Collinear and noncollinear rays) :



(ଚିତ୍ର 1.9) (କ)



(ଚିତ୍ର 1.9) (ଖ)

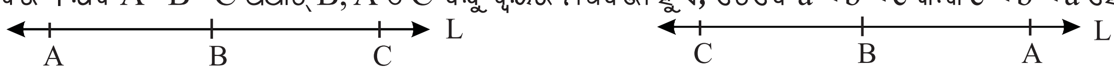
ଯେଉଁ ସବୁ ରଶ୍ମି ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ରେଖାର ଅଂଶ ବିଶେଷ, ସେମାନଙ୍କୁ ଏକରେଖୀ ବା ସରଳରୈଖିକ ରଶ୍ମି Collinear rays କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ର 1.9 (କ) ରେ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BA}$ ଆଦି L ସରଳରେଖାର ଅଂଶ ହୋଇଥିବାରୁ ଏମାନେ ଏକରେଖୀ ରଶ୍ମି ଅଟନ୍ତି । ମାତ୍ର ଚିତ୍ର 1.9 (ଖ) ରେ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DF}$ ନୈକରେଖୀ ରଶ୍ମି ଅଟନ୍ତି ।

1.4 : ସ୍ଥାନାଙ୍କ (Co-ordinates) ସମ୍ବନ୍ଧରେ କେତେକ ପ୍ରୟୋଜନୀୟ ତଥ୍ୟ :

ପୂର୍ବରୁ କୁହାଯାଇଛି – ଦୂରତା ସମ୍ପର୍କୀୟ ରୁଲର୍ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ହେତୁ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ R ଓ ଏକ ସରଳରେଖାର ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଗୋଟିଏ ଏକ-ଏକ ସମ୍ପର୍କ ସ୍ଥାପିତ ହୁଏ; ଅର୍ଥାତ୍ ସରଳରେଖାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ହୁଏ ଓ ଭିନ୍ନଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁ ଭିନ୍ନଭିନ୍ନ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ହୁଅନ୍ତି । **ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ କୁହାଯାଏ ।**

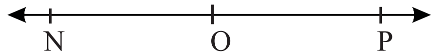
ରୁଲର୍ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଓ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତିତାର ସଂଜ୍ଞାକୁ ଆଧାର କରି ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମ୍ପର୍କରେ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ତଥ୍ୟ ପ୍ରତିପାଦିତ ହୁଏ । ପରବର୍ତ୍ତୀ କେତେକ ପ୍ରମାଣରେ ସେଗୁଡ଼ିକର ବ୍ୟବହାର କରାଯିବ । ତଥ୍ୟଗୁଡ଼ିକର ସବିଶେଷ ପ୍ରମାଣ ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ନୁହେଁ ।

(1) ମନେକର A, B ଓ C ସରଳରେଖା L ଉପରିସ୍ଥ ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଓ ସେମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ a, b ଓ c ଦେଉ । ଯଦି A - B - C ଅର୍ଥାତ୍ B, A ଓ C ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ହୁଏ, ତେବେ $a < b < c$ କିମ୍ବା $c < b < a$ ହେବ ।



(ଚିତ୍ର 1.10)

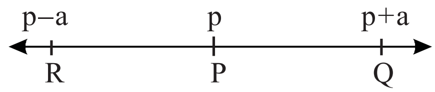
(2) ଏକ ସରଳରେଖା ଉପରେ O ଏବଂ P ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ (ଚିତ୍ର 1.11) ଆମେ ଉପଯୁକ୍ତ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ପଦ୍ଧତି (ଅର୍ଥାତ୍ ସରଳରେଖା ଓ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ ମଧ୍ୟରେ ଏକ-ଏକ ସମ୍ପର୍କ) ନିର୍ବାଚନ ଦ୍ୱାରା O ର ସ୍ଥାନାଙ୍କକୁ ଶୂନ ଓ P ର ସ୍ଥାନାଙ୍କକୁ ଧନାତ୍ମକ ନେଇପାରିବା । ଫଳରେ ଯଦି N-O-P ହୁଏ, ତେବେ ତଥ୍ୟ (1) ଅନୁଯାୟୀ N ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଋଣାତ୍ମକ ହେବ । ଏହାକୁ ଆଧାର କରି ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ (Number line) ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣିତ ହୁଏ । $\overrightarrow{OP}$ ରେ ଅବସ୍ଥିତ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଧନାତ୍ମକ ଓ $\overrightarrow{ON}$ ରେ ଅବସ୍ଥିତ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଋଣାତ୍ମକ ହୁଏ ।



(ଚିତ୍ର 1.11)

(3) L ସରଳରେଖା ଉପରେ P ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ a ଏକ ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ L ଉପରେ କେବଳ ମାତ୍ର ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ରହିଛି, ଯାହାର P ଠାରୁ ଦୂରତା a ଅଟେ ।

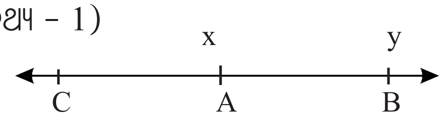
P ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ p ହେଲେ ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $p+a$ ଓ ଅନ୍ୟଟିର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $p-a$ ହେବ ।



(ଚିତ୍ର 1.12)

(4) ସ୍ଥାନାଙ୍କ ମାଧ୍ୟମରେ ରଶ୍ମି ଓ ରେଖାଖଣ୍ଡର ବିକଳ୍ପ ସଂଜ୍ଞା :

ମନେକର C - A - B ଏବଂ AB ସରଳରେଖାରେ A ଓ B ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ x ଓ y ଅଟେ । ଯଦି $x < y$ ହୁଏ, ତେବେ c ର ସ୍ଥାନଙ୍କ x ରୁ ସାନ ହେବ (ତଥ୍ୟ - 1)



(ଚିତ୍ର 1.13)

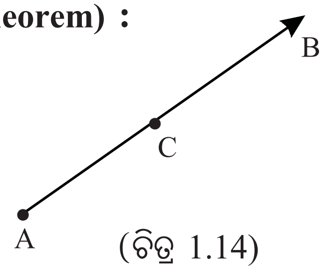
ତେଣୁ $\overrightarrow{AB} = \{P \in \overleftrightarrow{AB}$: P ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $\geq x\}$,

$\overrightarrow{AC} = \{P \in \overleftrightarrow{AB}$: P ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $\leq x\}$,

$\overline{AB} = \{P \in \overleftrightarrow{AB} : x \leq$ P ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $\leq y\}$,

(5) ରେଖାଖଣ୍ଡ ଅଙ୍କନ ଉପପାଦ୍ୟ (Segment - construction Theorem) :

r ଏକ ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ A, B ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ $\overrightarrow{AB}$ ଉପରେ କେବଳ ମାତ୍ର ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ C ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇ ପାରିବ, ଯେପରିକି $AC = r$ ହେବ ।



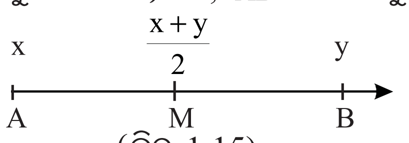
(ଚିତ୍ର 1.14)

(ଜ୍ୟାମିତିକ ପ୍ରମାଣ ଓ ଅଙ୍କନରେ ଉପରୋକ୍ତ ଉପପାଦ୍ୟର ବହୁଳ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ ।)

ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ (Mid point of a line-segment) :

ସଂଜ୍ଞା : $\overline{AB}$ ଉପରେ M ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଓ AM = MB ହେଲେ M କୁ $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ ।

ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଥାଏ । (ନିଜେ ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ଚେଷ୍ଟା କର) M, $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ହେଲେ, $AM = MB = \frac{1}{2}AB$



(ଚିତ୍ର 1.15)

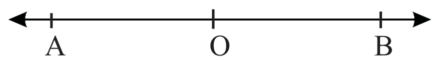
$\overleftrightarrow{AB}$ ଉପରେ A ଓ B ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ x ଓ y ହେଲେ $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $\frac{x+y}{2}$ ଅଟେ ।

ପ୍ରଶ୍ନ : ରଶ୍ମି ଓ ସରଳରେଖାର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଅଛି କି ? (ନିଜେ ପ୍ରମାଣ କର)

(ଉପରିସ୍ଥ ପ୍ରଶ୍ନକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କର, ଟିକିଏ ଚିନ୍ତାକର ଓ ତା'ପରେ ନିମ୍ନସ୍ଥ ଉତ୍ତରଟି ପଢ । ତୁମର ଚିନ୍ତାଧାରା ସୁପରିଚାଳିତ ଓ ମାର୍ଜିତ ହେବ ।)

ଉତ୍ତର : ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥିତି ସର୍ବଦା ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଉପରେ ନିର୍ଭର କରେ । ରଶ୍ମିର ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଥାଏ, ଯାହାକୁ ଆମେ ଆଦ୍ୟବିନ୍ଦୁ ବା ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ କହୁ, ଅନ୍ୟଟି ନଥାଏ । ସରଳରେଖାର ଆଦୌ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ନଥାଏ । (କାରଣ ସବୁଠାରୁ ବଡ଼ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ବା ସବୁଠାରୁ ସାନ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ବୋଲି କିଛି ନାହିଁ ।) ଏହି କାରଣରୁ ରଶ୍ମି ଓ ରେଖାର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ : ମନେକର ଉପଯୁକ୍ତ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ବାଚନ ଦ୍ୱାରା ଆମେ $\overleftrightarrow{AB}$ ଉପରିସ୍ଥ A ଓ B ର ସ୍ଥାନାଙ୍କକୁ ଯଥାକ୍ରମେ ଋଣାତ୍ମକ ଓ ଧନାତ୍ମକ ନେଲେ । ତେଣୁ A ଓ B ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଏଭଳି ଏକ ବିନ୍ଦୁ O ରହିବ ଯାହାର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଶୂନ ହେବ।



(ଚିତ୍ର 1.16)

(ରୁଲ୍‌ର ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ) ତେବେ O କୁ ଆମେ $\overleftrightarrow{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ କହିବା ନାହିଁ, କାରଣ $\overleftrightarrow{AB}$ ର କୌଣସି ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ନାହିଁ । ତେବେ ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ O କୁ ଆଉ ଗୋଟିଏ ବିଶେଷ ନାମରେ ପରିଚିତ କରାଯାଏ ଓ ତାହା ହେଉଛି **'ମୂଳବିନ୍ଦୁ' (Origin)।** ଏ ବିଷୟରେ ଅଧିକ କଥା ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତିରେ ଜାଣିବ ।

ଉପରୋକ୍ତ ପାଞ୍ଚଗୋଟି ତଥ୍ୟ, ସରଳରେଖାର ବିନ୍ଦୁ ଓ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ ମଧ୍ୟସ୍ଥ ନିମ୍ନୋକ୍ତ ସାମଞ୍ଜସ୍ୟ ପ୍ରକଟିତ କରେ ।

(i) ସରଳରେଖା ଅସଂଖ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ । (କାରଣ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ ଅସୀମ)

(ii) ଏହା ଆଦ୍ୟ ଓ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ବିହୀନ । (କାରଣ ସବୁଠାରୁ ବଡ ଓ ସବୁଠାରୁ ସାନ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ବୋଲି କିଛି ନାହିଁ ।)

(iii) ସରଳରେଖା ଏକ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ବ୍ୟାପ୍ତି (continuum - ପଢାଯାଏ, 'କଣ୍ଟିନ୍ୟୁଅମ୍'); ଅର୍ଥାତ୍ ଏହା ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଭାବରେ ପରିବ୍ୟାପ୍ତ; କାରଣ ଦୁଇଟି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରେ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଛଡା ଆଉ କିଛି ନାହିଁ ; ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ବା ଫାଙ୍କ (gap) ନାହିଁ - ଏକଥା ଉଚ୍ଚତର ଗଣିତରେ ପରେ ଅଧ୍ୟୟନ କରିବ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1 (a)

(କ) ବିଭାଗ

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପଦ ଗୁଡିକରୁ ସଂଜ୍ଞାବିହୀନ ଓ ସଂଜ୍ଞାବିଶିଷ୍ଟ (ଯାହାର ସଂଜ୍ଞା ଅଛି) ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ଚିହ୍ନାଅ ।

   ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ, ସ୍ଥାନାଙ୍କ, ଦୂରତା, ସରଳରେଖା, ରଶ୍ମି, ରେଖାଖଣ୍ଡ, ସମତଳ,ବିନ୍ଦୁ ।

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ଉତ୍ତର ପ୍ରଦାନ କର ।

(କ) ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖାରେ କେତୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଥାଏ ?

(ଖ) ଗୋଟିଏ ରେଖାଖଣ୍ଡରେ କେତୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଥାଏ ?

(ଗ) ଗୋଟିଏ ରେଖାଖଣ୍ଡରେ କେତୋଟି ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଓ କେତୋଟି ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଥାଏ ?

(ଘ) ଗୋଟିଏ ରଶ୍ମି ଓ ତାହାର ବିପରୀତ ରଶ୍ମିର ସଂଯୋଗରେ କ'ଣ ଗଠିତ ହୁଏ ?

(ଙ) ଗୋଟିଏ ରଶ୍ମି ଓ ତାହାର ବିପରୀତ ରଶ୍ମିର ଛେଦରେ କେତୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଥାଏ ?

(ଚ) ତିନୋଟି ପୃଥକ୍ ସରଳରେଖା ପରସ୍ପରକୁ ଅତିବେଶିରେ କେତୋଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବେ ?

(ଛ) ଚାରୋଟି ପୃଥକ୍ ସରଳରେଖା ପରସ୍ପରକୁ ଅତିବେଶିରେ କେତୋଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବେ ?

(ଜ) ଚାରୋଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସି ତିନୋଟି ଏକରେଖୀ ହୋଇ ନଥିଲେ, ସେମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା କେତୋଟି ସରଳରେଖା ନିର୍ଦ୍ଧାରିତ ହୋଇ ପାରିବ ?

3. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର । ଦତ୍ତ ଅଛି A - B - C

(i) $\overline{AB} \cup \overrightarrow{AC}$ = ...	(ii) $\overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC}$ = ...	(iii) $\overline{AB} \cup \overline{BC}$ = ...
(iv) $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$ = ...	(v) $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$ = ...	(vi) $\overline{AC} \cap \overline{BC}$ = ...
(vii) $\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{BC}$ = ...	(viii) $AC - BC$ = ...	(ix) $AC - AB$ = ...

4. L ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ A ଓ B ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ –3 ଓ 5 ହେଲେ AB କେତେ ?

5. $\overleftrightarrow{AB}$ ଉପରିସ୍ଥ A ଓ B ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ –16 ଓ 20 ହେଲେ $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ କେତେ ?

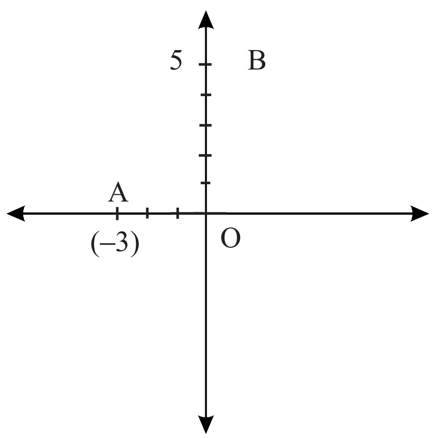
ପ୍ରଶ୍ନ - 4 ଓ 5 ପାଇଁ ସୂଚନା

ପ୍ରଶ୍ନ - 4 ରେ ଯଦି କେବଳ ମାତ୍ର ଏତିକି କୁହାଯାଇ ଥାନ୍ତା, 'A ଓ B ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ –3 ଓ 5 ହେଲେ AB କେତେ ?'

ତେବେ ପ୍ରଶ୍ନଟିର ସମାଧାନ କରିବା ସମ୍ଭବ କି ?

ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରଟିକୁ ଦେଖ ।

$\overleftrightarrow{OA}$ ଉପରେ A ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ –3 ଓ $\overleftrightarrow{OB}$ ଉପରେ B ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ 5 ଅଟେ । ତେବେ ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ AB=|–3–5| = 8 ହୋଇପାରିବ ନାହିଁ । କାରଣ କ'ଣ ? ରୁଲ୍‌ର ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟଟି ଆଉଥରେ ପଢ । ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପାଇଁ ଯେଉଁ ସୂତ୍ରର ପ୍ରୟୋଗ କରାଯାଏ, ତାହା କେବଳ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସରଳରେଖାରେ ନିରୂପିତ



(ଚିତ୍ର 1.17)

ସ୍ଥାନାଙ୍କ ପାଇଁ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ । ଦତ୍ତ ଚିତ୍ରରେ A ଓ B ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ –3 ଓ 5 ହେଲେ ମଧ୍ୟ ଉଭୟ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ସରଳରେଖା $\overleftrightarrow{OA}$ ଓ $\overleftrightarrow{OB}$ ଉପରେ ନିର୍ଣ୍ଣିତ ହୋଇଛି । ତେଣୁ ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ରୁଲ୍‌ର ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟର ସୂତ୍ର ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ନୁହେଁ ।

ପ୍ରଶ୍ନ - 5 ପାଇଁ ଅନୁରୂପ ସୂଚନା ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ । ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟର ସୂତ୍ର ମଧ୍ୟ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସରଳରେଖା ଉପରେ ନିର୍ଣ୍ଣିତ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ପରିପ୍ରେକ୍ଷୀରେ ସତ୍ୟ ଅଟେ । ଏ ପ୍ରସଙ୍ଗରେ ଅଧିକ ବିଚାର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତିରେ କରାଯିବ ।

(ଖ) ବିଭାଗ

6. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରଶ୍ନ ଗୁଡିକରେ ସମ୍ପୃକ୍ତ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଏକରେଖୀ ଅଟନ୍ତି ।

(କ) A,B ଓ C ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ –11, 4 ଓ 2 ହେଲେ, କେଉଁ ବିନ୍ଦୁଟି ଅନ୍ୟ ଦୁଇଟିର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ?

(ଖ) PQ = 8, QR = 5 ଓ RP = 3 ହେଲେ, P, Q ଓ R ମଧ୍ୟରେ କେଉଁ ବିନ୍ଦୁଟି ଅନ୍ୟ ଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ?

(ଗ) A ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ –3, A - C - B, BC = 2 ଓ C ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ –4 ହେଲେ, B ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଓ AB କେତେ ?

(ଘ) A ଓ B ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ –11 ଓ 21 ହେଲେ, $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ କେତେ ଓ A ଠାରୁ ଏହାର ଦୂରତା କେତେ ?

(ଙ) A ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ –5 ଓ $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ O ହେଲେ B ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ କେତେ ?

7. A, L ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ A ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ 5 ଅଟେ । A ଠାରୁ 2 ଏକକ ଦୂରତା ବିଶିଷ୍ଟ କେତୋଟି ବିନ୍ଦୁ L ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେବ ଓ ସେମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ କେତେ ହେବ ?

8. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ଉଦାହରଣ ମାଧ୍ୟମରେ ବୁଝାଅ ।

ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ, ବିପରୀତ ରଶ୍ମି, ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଦୂରତା, ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତିତା ।

1.5 କୋଣ ଓ କୋଣ-ପରିମାଣ (Angle and Angle-measure)

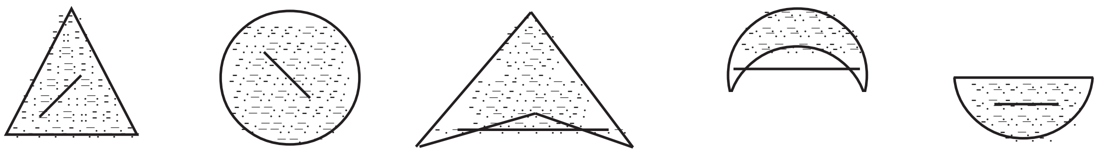
ଏ ସମ୍ପର୍କରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ପୂର୍ବରୁ ଆମେ ଜ୍ୟାମିତିର ଦୁଇଟି ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ତଥ୍ୟ ସମ୍ପର୍କରେ ଜାଣିବା ଆବଶ୍ୟକ । ତାହା ହେଉଛି **'ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍' ଓ 'ସରଳରେଖାର ପାର୍ଶ୍ୱ'** ।

ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ (Convex Set) :

ସଂଜ୍ଞା: ଏକ ସେଟ୍ S ର ଯେ କୌଣସି ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ A ଓ B ପାଇଁ ଯଦି $\overline{AB} \subset S$ ହୁଏ, ତେବେ S କୁ ଏକ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ କୁହାଯାଏ । ଉଦାହରଣ: ରେଖାଖଣ୍ଡ, ରଶ୍ମି, ସରଳରେଖା - ଏମାନେ ସମସ୍ତେ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ ।

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ - 5 ଅନୁଯାୟୀ ସମତଳ ମଧ୍ୟ ଏକ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ ।

କାଗଜ ପୃଷ୍ଠା – ସମତଳର ବିନ୍ଦୁ ମାନଙ୍କୁ ନେଇ ନିମ୍ନରେ କେତେଗୋଟି ସେଟ୍‌ର ଚିତ୍ର ଦିଆଯାଇଛି:



(କ) (ଖ) (ଗ) (ଘ) (ଙ)

(ଚିତ୍ର 1.18)

ଏମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ (କ),(ଖ)ଓ(ଙ)ରେ ପ୍ରଦର୍ଶିତ ଚିତ୍ର ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଯେ କୌଣସି ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱାରା ନିର୍ଣ୍ଣିତ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଚିତ୍ର ମଧ୍ୟରେ ରହିଯାଇଛି । ତେଣୁ ଏସବୁ ଚିତ୍ରରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ସେଟ୍ ଗୁଡ଼ିକ ଉତ୍ତଳ ଅଟନ୍ତି । ମାତ୍ର ଏକଥା (ଗ) ଓ (ଘ) ରେ ପ୍ରଦର୍ଶିତ ଚିତ୍ର ପାଇଁ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ନୁହେଁ । ତେଣୁ ସେ ଦୁଇଟି ସେଟ୍ ଉତ୍ତଳ ନୁହନ୍ତି ।

ଗୋଟିଏ ସେଟ୍ ଉତ୍ତଳ ନୁହେଁ – ଏହା ପ୍ରମାଣ କରିବା ପାଇଁ ଆମକୁ ସେହି ସେଟ୍ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ଏଭଳି ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ଦେଖାଇବାକୁ ପଡ଼ିବ, ଯେପରିକି ସେମାନଙ୍କର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ସେଟ୍ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ରୂପେ ରହି ପାରୁନଥିବ । ଏହି କାରଣରୁ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ ସେଟ୍ ଓ ଶୂନସେଟ୍ ମଧ୍ୟ ଉତ୍ତଳସେଟ୍ ବୋଲି ଗ୍ରହଣ କରାଯାଏ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ: ଦୁଇଟି ଉତ୍ତଳସେଟ୍‌ର ଛେଦ ଏକ ଉତ୍ତଳସେଟ୍, ମାତ୍ର ସଂଯୋଗ ଉତ୍ତଳସେଟ୍ ନ ହୋଇପାରେ ।

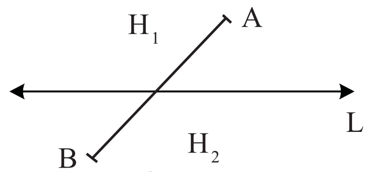
ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ 7 - ସମତଳ – ବିଭାଜନ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ (Plane-SeparationPostulate) :

ମନେକର L ସରଳରେଖାଟି P ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ । ସମତଳର ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁ ଗୁଡ଼ିକ ଏହି ସରଳରେଖାରେ ନାହାଁନ୍ତି, ସେମାନଙ୍କୁ ଦୁଇଟି ସେଟ୍ H_1 ଓ H_2 ରେ ବିଭକ୍ତ କରାଯାଇପାରିବ ; ଯେପରି

(i) H_1 ଓ H_2 ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ ହେବ ଏବଂ

(ii) ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ A ଓ B ଯଥାକ୍ରମେ H_1 ଓ H_2 ରେ ରହିଲେ,

$\overline{AB}$ L ସରଳରେଖାକୁ ଛେଦ କରିବ ।



(ଚିତ୍ର 1.19)

ମନ୍ତବ୍ୟ: ଉପରୋକ୍ତ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟରୁ ଏହା ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇ ପାରିବ ଯେ H_1 ଓ H_2 ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଅଣଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍ ଓ ସେମାନେ ଅଣଛେଦୀ, ଅର୍ଥାତ୍ କୌଣସି ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ଉଭୟ H_1 ଓ H_2 ରେ ରହି ପାରିବ ନାହିଁ । (ଏକଥା ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର ଦେଖି ହୃଦୟଙ୍ଗମ କରିପାରିବ । ଯୁକ୍ତିମୂଳକ ପ୍ରମାଣ ପାଠ୍ୟ ପରିସର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ନୁହେଁ ।)

ସରଳରେଖା ପାର୍ଶ୍ୱ: ସମତଳ – ବିଭାଜନ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଦ୍ୱାରା ନିର୍ଣ୍ଣିତ H_1 ଓ H_2 ସେଟ୍ ଦୁଇଟିକୁ ସରଳରେଖା L ର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପାର୍ଶ୍ୱ କୁହାଯାଏ । A ଓ B ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ ଥିବା ପାର୍ଶ୍ୱଦ୍ୱୟକୁ ଯଥାକ୍ରମେ L ର A- ପାର୍ଶ୍ୱ ଓ B- ପାର୍ଶ୍ୱ କୁହାଯାଏ ।

ମନେରଖ – ଏକ ସରଳରେଖାର ପାର୍ଶ୍ୱଦ୍ୱୟ ଉତ୍ତଳ, ଅଣଶୂନ୍ୟ ଓ ଅଣଛେଦୀ ସେଟ୍ ଅଟନ୍ତି । ସରଳରେଖାର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ **ଅର୍ଦ୍ଧସମତଳ (Half Planes)** କୁହାଯାଏ । ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଦ୍ୱାରା ନିର୍ଣ୍ଣିତ ଅର୍ଦ୍ଧସମତଳ ଦୁଇଟିକୁ ସରଳରେଖାର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱ ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ । ସରଳରେଖାକୁ ତାହାଦ୍ୱାରା ନିର୍ଣ୍ଣିତ ଅର୍ଦ୍ଧସମତଳ ଦ୍ୱୟର **ଧାର (edge)** କୁହାଯାଏ ।

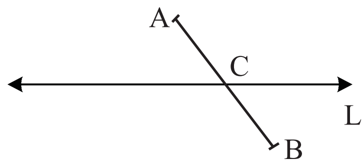
ସମତଳ – ବିଭାଜନ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଆଧାରିତ କେତେକ ପ୍ରୟୋଜନୀୟ ତଥ୍ୟ :

(1) L ସରଳରେଖା P ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେଲେ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ -7 ର ପରିମାଣ ସ୍ୱରୂପ ସମତଳଟି ତିନୋଟି ଅଣଶୂନ୍ୟ, ଅଣଛେଦୀ ଓ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ L, H_1 ଓ H_2 ରେ ବିଭକ୍ତ ହୁଏ, ଅର୍ଥାତ୍ $P = L \cup H_1 \cup H_2$

(2) ଉଭୟ ଅର୍ଦ୍ଧସମତଳ H_1 ଓ H_2 ଅଣଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍ ହୋଇଥିବାରୁ, ଯେ କୌଣସି ଅର୍ଦ୍ଧସମତଳ ଉପରିସ୍ଥ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁକୁ L ଉପରିସ୍ଥ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ସହ ସଂଯୋଗ କରି ସରଳରେଖାଟିଏ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇ ପାରିବ । ଏହାର ପରିଣାମ ସ୍ୱରୂପ ପ୍ରତିପାଦିତ ହୁଏ ଯେ, ଗୋଟିଏ ସମତଳସ୍ଥ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟଦେଇ ଅସଂଖ୍ୟ ସରଳରେଖା ଅବସ୍ଥିତ । ତେଣୁ ସମତଳ – ବିଭାଜନ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟର ପରିଣାମ ସ୍ୱରୂପ ସରଳରେଖା ଭଳି ସମତଳ ମଧ୍ୟ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଭାବରେ ପରିବ୍ୟାପ୍ତ (continuum) ଅଟେ; ଅର୍ଥାତ୍ ସମତଳରେ ମଧ୍ୟ କୌଣସି ଫାଙ୍କ (gap) ନାହିଁ ।

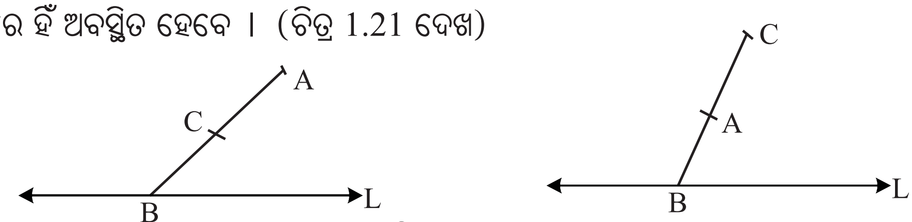
(3) ନିମ୍ନୋକ୍ତ ତିନୋଟି ତଥ୍ୟ ସମତଳ – ବିଭାଜନ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ସାହାଯ୍ୟରେ ପ୍ରତିପାଦିତ ହୁଏ ।

(i) ମନେକର ଏକ ସମତଳ ଉପରିସ୍ଥ L ସରଳରେଖା ଉକ୍ତ ସମତଳର AB ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ C ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ। ଯଦି C ବିନ୍ଦୁଟି A ଓ B ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ଠାରୁ ପୃଥକ୍ ହୁଏ, ତେବେ A ଓ B ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ L ର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେବେ । (ଚିତ୍ର 1.20 ଦେଖ)



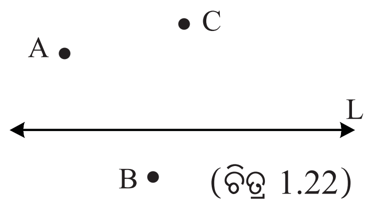
(ଚିତ୍ର 1.20)

(ii) ମନେକର L ସରଳରେଖା ଓ $\overline{AB}$ ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ । $\overline{AB}$ ର ଗୋଟିଏ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ B, L ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ଓ ଅନ୍ୟ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ A, L ବାହାରେ ଅବସ୍ଥିତ । ତେବେ B - C - A କିମ୍ବା B - A - C ହେଲେ, C ବିନ୍ଦୁ L ର A - ପାର୍ଶ୍ୱରେ ହିଁ ଅବସ୍ଥିତ ହେବେ । (ଚିତ୍ର 1.21 ଦେଖ)



(ଚିତ୍ର 1.21)

(iii) A ଓ B ବିନ୍ଦୁ L ର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ B ଓ C ବିନ୍ଦୁ L ର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେଲେ A ଓ C ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ L ର ସମପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେବେ । (ଚିତ୍ର 1.22 ଦେଖ)



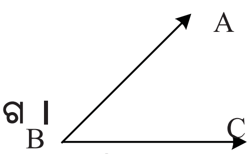
(ଚିତ୍ର 1.22)

ଉପରୋକ୍ତ ତଥ୍ୟ ଗୁଡିକ ଜ୍ୟାମିତିର ତ୍ରୁଟିମୁକ୍ତ ଉପସ୍ଥାପନା ପାଇଁ ଅତ୍ୟନ୍ତ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ । ପରବର୍ତ୍ତୀ ସଂଜ୍ଞା ଓ ପ୍ରମାଣରେ ଏଗୁଡିକର ବ୍ୟବହାର କରାଯିବ ।

କୋଣର ସଂଜ୍ଞା: ତିନୋଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ A, B ଓ C ଯଦି ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ନହୁଅନ୍ତି, ତେବେ $\overrightarrow{BA}$ ଓ $\overrightarrow{BC}$ **ର ସଂଯୋଗକୁ ABC କୋଣ କୁହାଯାଏ ଓ ଉକ୍ତ କୋଣକୁ $\angle ABC$ ସଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ।**

ସେଟ୍ ପରିଭାଷାରେ ଆମେ ଲେଖି ପାରିବା : $\angle \mathbf{ABC} = \overrightarrow{\mathbf{BA}} \cup \overrightarrow{\mathbf{BC}}$

ବସ୍ତୁତଃ କୋଣ ହେଉଛି ସାଧାରଣ ଆଦ୍ୟବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ ଦୁଇଟି ନୈକରେଖୀ ରଶ୍ମିର ସଂଯୋଗ ।



(ଚିତ୍ର 1.23)

ମନ୍ତବ୍ୟ: (1) A, B ଓ C ତିନୋଟି ନୈକରେଖୀ ବିନ୍ଦୁ । ତେଣୁ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ-4 ଅନୁଯାୟୀ ଏମାନେ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ, ଯାହାକୁ ABC ସମତଳ କୁହାଯାଏ । ତେଣୁ $\angle ABC$ ମଧ୍ୟ ଏହି ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

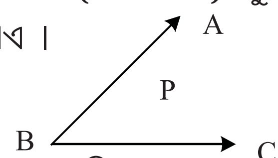
(2) B କୁ $\angle ABC$ ର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ (Vertex) $\overrightarrow{BA}$ ଓ $\overrightarrow{BC}$ କୁ $\angle ABC$ ର ବାହୁ (Side) କୁହାଯାଏ ।

କୋଣର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଓ ବହିର୍ଦେଶ:

$\overleftrightarrow{BC}$ ର A- ପାର୍ଶ୍ୱ $\overleftrightarrow{AB}$ ର C- ପାର୍ଶ୍ୱର ଛେଦକୁ $\angle ABC$ ର **ଅନ୍ତର୍ଦେଶ (interior)** କୁହାଯାଏ ।

$\angle ABC$ ର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ଥିବା ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁକୁ $\angle ABC$ ର **ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ (interior Point)** କୁହାଯାଏ। ଦତ୍ତ ଚିତ୍ରରେ P, $\angle ABC$ ର ଗୋଟିଏ ଅନ୍ତସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ଅଟେ । ଏହିପରି ଅସଂଖ୍ୟ ବିନ୍ଦୁକୁ ନେଇ କୋଣର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଗଠିତ।

ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ନଥିବା ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ ସେଟ୍‌କୁ କୋଣର **ବହିର୍ଦେଶ (exterior)** କୁହାଯାଏ । ବହିର୍ଦେଶରେ ଥିବା ବିନ୍ଦୁକୁ କୋଣର **ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ (exterior point)** କୁହାଯାଏ ।



(ଚିତ୍ର 1.24)

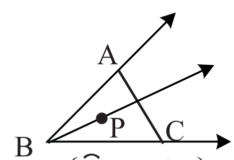
ଦତ୍ତ ଚିତ୍ରରେ Q, $\angle ABC$ ର ଗୋଟିଏ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ।

ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍‌ର ସଂଜ୍ଞା ଓ ସମତଳ ବିଭାଜନ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଦ୍ୱାରା ନିମ୍ନୋକ୍ତ ତଥ୍ୟ ଗୁଡିକ ପ୍ରତିପାଦିତ ହୁଏ :

(1) କୋଣର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଏକ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍; ମାତ୍ର କୋଣ ବା ତାହାର ବହିର୍ଦେଶ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ ନୁହେଁ ।

(2) ଗୋଟିଏ କୋଣ, ତାହାର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଓ ବହିର୍ଦେଶ - ଏହି ତିନୋଟି ପରସ୍ପର ଅଣଛେଦୀ ସେଟ୍ ; ଅର୍ଥାତ୍ ଏମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସି ଦୁଇଟି ସେଟ୍ ମଧ୍ୟରେ ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ନାହିଁ ।

(3) P, $\angle ABC$ର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ B କୁ ଛାଡି $\overrightarrow{BP}$ ର ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ $\angle ABC$ ର ଅନ୍ତସ୍ଥ ହେବେ । ସେହିପରି A ଓ C ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟ $\angle ABC$ ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ହେବ ।



(ଚିତ୍ର 1.25)

(4) ପ୍ରତିଚ୍ଛେଦୀ ଉପପାଦ୍ୟ (Cross-bar theorem)

P, $\angle ABC$ ର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ $\overrightarrow{BP}$, $\overline{AC}$ କୁ ଛେଦ କରିବ ।

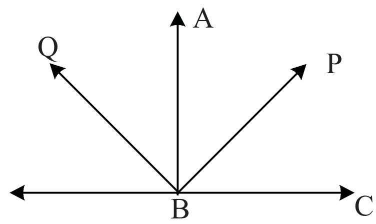
ପରବର୍ତ୍ତୀ ଯୁକ୍ତି ମୂଳକ ପ୍ରମାଣ ମାନଙ୍କରେ ଏହି ଉପପାଦ୍ୟର ପ୍ରୟୋଗ କରାଯିବ । BP ରଶ୍ମି କିପରି AC ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ଛେଦ କରିଛି , ତାହା ଚିତ୍ରରୁ ଉପଲବ୍ଧି କରି ପାରିବ । ଉପପାଦ୍ୟଟିର ଯୁକ୍ତି ମୂଳକ ପ୍ରମାଣ ପାଠ୍ୟ ପରିସରରେ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ନୁହେଁ ।

କୋଣର ପରିମାଣ (Measure of an Angle) :

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ-8 ପ୍ରୋଟାକ୍ଟର ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ (Protractor Postulate)

ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣ ସହ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସଂପୃକ୍ତ ଓ ଏହାକୁ ସଂପୃକ୍ତ କୋଣର ପରିମାଣ କୁହାଯାଏ । $\angle ABC$ ର ପରିମାଣକୁ $m\angle ABC$ ରୂପେ ସୂଚିତ କରାଯାଏ ଏବଂ ଏହା ନିମ୍ନୋକ୍ତ ସର୍ତ୍ତ ପାଳନ କରେ ।

(i) $0 < m\angle ABC < 180$



(ii) $0 < \theta < 180$ ହେଲେ $\overleftrightarrow{BC}$ ର ଯେ କୌଣସି ପାର୍ଶ୍ୱରେ କେବଳ ମାତ୍ର ଗୋଟିଏ ରଶ୍ମି $\overleftrightarrow{BQ}$ ଅବସ୍ଥିତ, ଯେପରି $m\angle QBC = \theta$ ହେବ ।

(ଚିତ୍ର 1.26)

(θ – ଥିଟା ସାଧାରଣତଃ କୋଣ ପରିମାଣ ପାଇଁ ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ ।)

(iii) $\angle ABC$ ର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ P ଯେ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ $m\angle ABC = m\angle ABP + m\angle PBC$ ହେବ । (ଏହି ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟର ସର୍ତ୍ତ ପୂରଣ କରି କୋଣ ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରୁଥିବା ଯନ୍ତ୍ର ବା ଉପାୟକୁ ପ୍ରୋଟାକ୍ଟର କୁହାଯାଏ ।)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ: ପ୍ରୋଟାକ୍ଟର ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟରେ

1. (i) $0 < \theta < 180$ ପାଇଁ ଲବ୍ଧ କୋଣ ମାପକୁ ଡିଗ୍ରୀମାପ କୁହାଯାଏ । ଯଦି $\angle ABC$ ର ମାପ x ହୁଏ ($0 < x < 180$), ତେବେ ଆମେ ଲେଖୁ $m\angle ABC = x^0$

(ii) $0 < \theta < \pi$ (ପାଇ ଏକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଓ ଏହାର ଆସନ୍ନ ମାନ 3.1415, $\frac{22}{7}$ ଇତ୍ୟାଦି)

ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଲବ୍ଧ କୋଣମାପକୁ ରେଡିଆନ୍ ମାପ କୁହାଯାଏ । ଏ ପ୍ରକାର କୋଣମାପ ସାଧାରଣତଃ ଗଣିତର ତାତ୍ତ୍ୱିକ ଆଲୋଚନାରେ ବହୁଳ ଭାବେ ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ ।

(iii) **$0 < \theta < 200$ ହେଲେ ଲବ୍ଧ କୋଣ ମାପକୁ ଗ୍ରେଡ୍ ମାପ କୁହାଯାଏ ।**

2. ଉପରୋକ୍ତ ମନ୍ତବ୍ୟ ଅନୁଯାୟୀ

π ରେଡିୟାନ୍ = 180 ଡିଗ୍ରୀ = 200 ଗ୍ରେଡ୍ । ଏସବୁ କୋଣ ମାପର ଏକକ ମଧ୍ୟରୁ ଡିଗ୍ରୀ ଏକକ ସାଧାରଣ ଆବଶ୍ୟକତା ପାଇଁ ବହୁଳ ଭାବରେ ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ ।

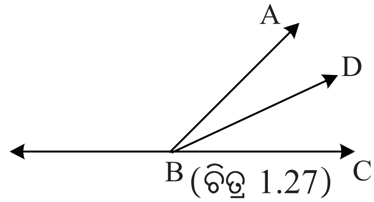
$1^0 = 60'$ (60 ମିନିଟ୍) $1' = 60''$ (ସେକେଣ୍ଡ)

3. ଦୁଇଟି କୋଣର ପରିମାଣ ସମାନ ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କୁ ସର୍ବସମ କୋଣ କୁହାଯାଏ ।

$m\angle ABC = m\angle PQR$ ହେଲେ $\angle ABC$ ଓ $\angle PQR$ ସର୍ବସମ ହୁଅନ୍ତି ଓ ଏହାକୁ ସାଙ୍କେତିକ ଉପାୟରେ $\angle ABC \cong \angle PQR$ ଲେଖାଯାଏ ।

ପ୍ରୋଟାକ୍ଟର ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଆଧାରିତ କେତେକ ପ୍ରୟୋଜନୀୟ ତଥ୍ୟ :

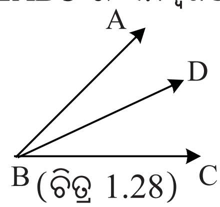
1. ଯଦି A ଓ D, $\overleftrightarrow{BC}$ ର ସମପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥିତ ବିନ୍ଦୁ ଓ $m\angle ABC > m\angle DBC$ ହୁଏ, ତେବେ D, $\angle ABC$ ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେବ । ଏହାର ବିପରୀତ ଉକ୍ତି ମଧ୍ୟ ସତ୍ୟ, ଅର୍ଥାତ୍ A ଓ D, $\overleftrightarrow{BC}$ ର ସମପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥିତ ଓ $m\angle ABD > m\angle DBC$ ହେଲେ, $\overrightarrow{BD}$ $\angle ABC$ର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ବିସ୍ତୃତ ହେବ ।



(ଚିତ୍ର 1.27)

2. **କୋଣ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ (Angle Bisector) :**

ପ୍ରୋଟାକ୍ଟର ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଓ ଉପରୋକ୍ତ ତଥ୍ୟ (1) ରୁ ଏହା ପ୍ରତିପାଦିତ ହୁଏ ଯେ $\angle ABC$ ର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ବିସ୍ତୃତ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ରଶ୍ମି $\overrightarrow{BD}$ ରହିଛି, ଯେପରିକି $m\angle DBC = \frac{1}{2} m\angle ABC$ ଅଟେ । $\overrightarrow{BD}$କୁ $\angle ABC$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ (bisector) କୁହାଯାଏ ।



(ଚିତ୍ର 1.28)

ଦତ୍ତ ଚିତ୍ରରେ $\overrightarrow{BD}$, $\angle ABC$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଓ $m\angle ABD = m\angle DBC$ ଅଟେ ।

ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାର କୋଣ (Types of Angles) :

1. ପରିମାଣ ଭେଦରେ କୋଣ ଗୁଡ଼ିକ ତିନି ପ୍ରକାରରେ ବିଭକ୍ତ । ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ :

90^0 ରୁ କମ୍ ହେଲେ ତାହାକୁ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ, 90^0 ସହ ସମାନ ହେଲେ ସମକୋଣ ଓ 90^0 ରୁ ଅଧିକ ହେଲେ ସ୍ଥୂଳକୋଣ କୁହାଯାଏ ।

2. **ଅନୁପୂରକ ଓ ପରିପୂରକ କୋଣ (Complementary and Supplementary Angles)** :

(i) ଦୁଇଟି କୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 90^0 ହେଲେ ସେମାନଙ୍କୁ ପରସ୍ପର ଅନୁପୂରକ କୋଣ (Complementary angles) କୁହାଯାଏ ।

(ii) ଦୁଇଟି କୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 180^0 ହେଲେ ସେମାନଙ୍କୁ ପରସ୍ପର ପରିପୂରକ କୋଣ (Supplementary angles) କୁହାଯାଏ ।

3. ସନ୍ନିହିତ କୋଣ (Adjacent angles) :

ଦୁଇଟି କୋଣର ଗୋଟିଏ ସାଧାରଣ ବାହୁ ଓ କୋଣ ଦ୍ୱୟର ଅନ୍ୟବାହୁ ଦୁଇଟି ସାଧାରଣ ବାହୁର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ବିସ୍ତୃତ ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କୁ ସନ୍ନିହିତ କୋଣ କୁହାଯାଏ । ଦତ୍ତ ଚିତ୍ରରେ $\angle AOB$ ଓ $\angle AOC$, $\angle PSQ$ ଓ $\angle QSR$ ସନ୍ନିହିତ ଅଟନ୍ତି । ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଯେ, ଦୁଇ ସନ୍ନିହିତ କୋଣର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଅଣଛେଦୀ ।

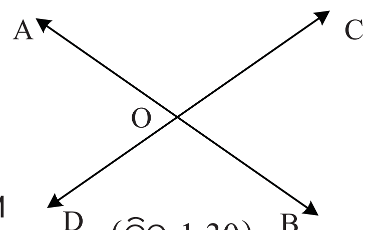
(ଚିତ୍ର 1.29)

(ସୂଚନା: ଆଗରୁ ସରଳରେଖାର ପାର୍ଶ୍ୱ କଥା କୁହାଯାଇଥିଲା । ତେବେ $\overline{AB}$ ଓ $\overrightarrow{AB}$ ଏମାନଙ୍କର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱ ବା ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱ କହିଲେ $\overleftrightarrow{AB}$ ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ହିଁ ବୁଝାଏ ।)

ସାଧାରଣ ବାହୁର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ବିସ୍ତୃତ ବାହୁ ଦ୍ୱୟକୁ ସନ୍ନିହିତ କୋଣ ମାନଙ୍କର **ବହିଃସ୍ଥ ବାହୁ (exterior Sides)** କୁହାଯାଏ।

4. **ପ୍ରତୀପ କୋଣ (Vertically Opposite angles) :**

ଗୋଟିଏ କୋଣର ବାହୁଦ୍ୱୟର ବିପରୀତ ରଶ୍ମି ମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ କୋଣକୁ ଉକ୍ତ କୋଣର ପ୍ରତୀପ କୋଣ କୁହାଯାଏ । ଦତ୍ତ ଚିତ୍ରରେ ∠AOC ଓ ∠BOD ପରସ୍ପର ପ୍ରତୀପ ଅଟନ୍ତି ।



(ଚିତ୍ର 1.30)

ସମକୋଣ ସମ୍ପର୍କିତ କେତୋଟି ସଂଜ୍ଞା :

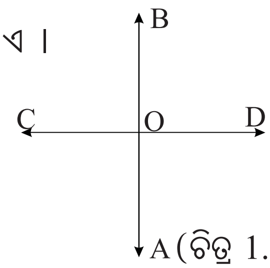
ପରସ୍ପର ଲମ୍ବ (Mutually perpendicular) ରେଖା ଓ ରଶ୍ମି :

ଦୁଇଟି ପରସ୍ପର ଅଣଚ୍ଛେଦୀ ରେଖା ଦ୍ୱାରା ସୃଷ୍ଟି ହେଉଥିବା ଚାରିକୋଣ ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସି ଗୋଟିଏ କୋଣ ସମକୋଣ ହେଲେ ରେଖାଦ୍ୱୟ 'ପରସ୍ପର ଲମ୍ବ' ହୁଅନ୍ତି ।

$\overleftrightarrow{AB}$ ଓ $\overleftrightarrow{CD}$ ପରସ୍ପର ଲମ୍ବ – ଏହାକୁ ସଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ ଲେଖାଯାଏ ।

$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$

ଅର୍ଥାତ୍ $\overleftrightarrow{AB}$ ଓ $\overleftrightarrow{CD}$ ପରସ୍ପର ଲମ୍ବ ହେଲେ $\overrightarrow{AB}$ ଓ $\overrightarrow{CD}$ ପରସ୍ପର ଲମ୍ବ ହେବେ, ଅନ୍ୟଥା ନୁହେଁ ।



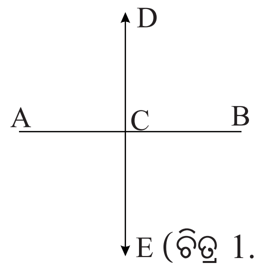
(ଚିତ୍ର 1.31)

ରେଖାଖଣ୍ଡର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ : ଗୋଟିଏ ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ଓ ଏହା ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେଉଥିବା ସରଳରେଖାକୁ ରେଖାଖଣ୍ଡର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ (Perpendicular bisector) କୁହାଯାଏ ।

ଚିତ୍ରରେ $\overleftrightarrow{ED}$, $\overline{AB}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ: (i) AB ରେଖାଖଣ୍ଡ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ କହିବାର ଅର୍ଥ ହେଉଛି AB ସରଳରେଖା ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।

(ii) ସଂଜ୍ଞାନୁଯାୟୀ ସମକୋଣର ଦୁଇବାହୁ ପରସ୍ପର ଲମ୍ବ ।



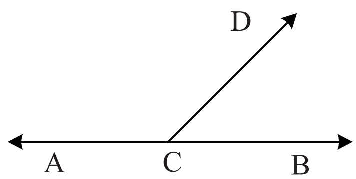
(ଚିତ୍ର 1.32)

1.6 ପରିପୂରକ ଓ ପ୍ରତୀପ କୋଣ ସମ୍ପର୍କରେ ପ୍ରୟୋଜନୀୟ ତଥ୍ୟ:

ପରିପୂରକ କୋଣ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ତଥ୍ୟ:

(a) ଗୋଟିଏ ରଶ୍ମିର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ଅନ୍ୟ ଏକ ରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେଲେ ଯେଉଁ ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ ହୁଅନ୍ତି, ସେମାନେ ପରସ୍ପର ପରିପୂରକ; ଅର୍ଥାତ୍ ସେମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 180^0 ଅଟେ ।

(b) ବିପରୀତ କ୍ରମେ ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ କୋଣ ପରସ୍ପର ପରିପୂରକ ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କ ବହିଃସ୍ଥ ବାହୁ ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ବିପରୀତ ରଶ୍ମି ଅଟନ୍ତି ।



$m\angle ACD + m\angle BCD = 180^0$

(ଚିତ୍ର 1.33)

ଉପରୋକ୍ତ ତଥ୍ୟକୁ **ପରିପୂରକ ଉପପାଦ୍ୟ (Supplementary Theorem)** କୁହାଯାଏ । ଏହାର ପ୍ରମାଣ ପାଠ୍ୟ ପରିସର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ନୁହେଁ । ଯୁକ୍ତି ମୂଳକ ପ୍ରମାଣରେ ଏହାର ବହୁଳ ବ୍ୟବହାର ହୁଏ । ପରବର୍ତ୍ତୀ ଉପପାଦ୍ୟର ପ୍ରମାଣ ଏହି ତଥ୍ୟ ଉପରେ ଆଧାରିତ ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 2

ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କଲେ ଉତ୍ପନ୍ନ ହେଉଥିବା ପ୍ରତୀପ କୋଣ ମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ସମାନ।

(If two lines intersect, then the measures of the vertically opposite angles formed thereby,are equal)

ଦତ୍ତ: $\overleftrightarrow{AB}$ ଓ $\overleftrightarrow{CD}$ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ: $m\angle AOD = m\angle BOC, m\angle AOC = m\angle BOD$

ପ୍ରମାଣ: $\overrightarrow{OA}$ ର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ O, $\overleftrightarrow{CD}$ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

$\therefore m\angle AOC + m\angle AOD = 180^0$ (ପରିପୂରକ ଉପପାଦ୍ୟ)

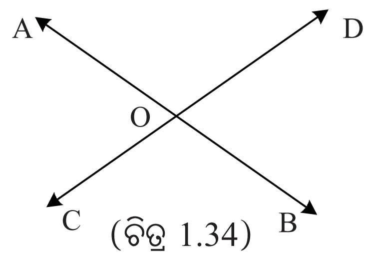
$\overrightarrow{OC}$ ର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ O, $\overleftrightarrow{AB}$ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

$\therefore m\angle AOC + m\angle BOC = 180^0$ (ପରିପୂରକ ଉପପାଦ୍ୟ)

ତେଣୁ $m\angle AOC + m\angle AOD = m\angle AOC + m\angle BOC$

$\therefore m\angle AOD = m\angle BOC$

ସେହିପରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇ ପାରିବ $m\angle AOC = m\angle BOD$ (ପ୍ରମାଣିତ)



(ଚିତ୍ର 1.34)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1(b)

(କ) ବିଭାଗ

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପଦଗୁଡିକର ସଂଜ୍ଞା ଲେଖ ।
   କୋଣର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ, ସନ୍ନିହିତ କୋଣ, ପ୍ରତୀପ କୋଣ, ପରିପୂରକ କୋଣ, ଅନୁପୂରକ କୋଣ ।
2. ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।
   (i) ଗୋଟିଏ କୋଣର କେତୋଟି ବାହୁ ଥାଏ ? (ii) ଗୋଟିଏ କୋଣର କେତୋଟି ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ଥାଏ ?
   (iii) କୋଣର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ କେତୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଥାଏ ? (iv) କୋଣ ଓ ଏହାର ଅନ୍ତର୍ଦେଶର ଛେଦରେ କେତୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଥାଏ ?
3. ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ତାଲିକାରୁ କେଉଁ ଗୁଡିକ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ ଦର୍ଶାଅ :
   (i) ରେଖାଖଣ୍ଡ, (ii) ରଶ୍ମି, (iii) ରେଖା, (iv) କୋଣ, (v) କୋଣର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ, (vi) ସମତଳ, (vii) କୋଣର ବହିର୍ଦେଶ
4. ତିନୋଟି ସରଳରେଖା ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦକରୁଥିବାର ଏକ ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର । ତତ୍ପରେ ଚିତ୍ରକୁ ଦେଖି ପ୍ରତୀପ କୋଣ ଯୋଡ଼ା ଗୁଡ଼ିକୁ ଲେଖ ।
5. ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା ପରସ୍ପରକୁ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଥିବାର ଚିତ୍ରଟିଏ ଅଙ୍କନ କର । ତତ୍ପରେ ଚିତ୍ରରୁ ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରକ କୋଣଯୋଡ଼ାଗୁଡ଼ିକୁ ଲେଖ ।

6. XY ସରଳରେଖାର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ M ଓ N ବିନ୍ଦୁକୁ ଚିହ୍ନଟ କର । ଅଙ୍କିତ ସରଳରେଖାର N-ପାର୍ଶ୍ୱରେ C ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ M- ପାର୍ଶ୍ୱରେ B ବିନ୍ଦୁ ଚିହ୍ନଟ କର । ଚିତ୍ର ମାଧ୍ୟମରେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, BM ଓ NC ରେଖାଖଣ୍ଡଦ୍ୱୟ ସରଳରେଖାର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ରହିବେ ।

7. ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ଦିଅ । ଆବଶ୍ୟକ ସ୍ଥଳେ ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ।

(i) x ବିନ୍ଦୁ $\overleftrightarrow{AB}$ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ନହେଲେ ଓ A - O - B ହେଲେ $m\angle XOA + m\angle XOB$ କେତେ ?

(ii) $\overleftrightarrow{AB}$ ଓ $\overleftrightarrow{CD}$ ର ଛେଦବିନ୍ଦୁ O ହେଲେ $\angle AOC$ର ପ୍ରତୀପ କୋଣ କେଉଁଟି ?

(iii) C, $\angle AOB$ ର ଅନ୍ତସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ, $m\angle AOC = x$ ଓ $m\angle AOB = y$ ହେଲେ $m\angle BOC$ କେତେ ?

(iv) ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କଲେ ଉତ୍ପନ୍ନ ହେଉଥିବା କୋଣ ଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ ଯଦି ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ 30^0 ହୁଏ, ତେବେ ଏହାର ପ୍ରତୀପ କୋଣର ପରିପୂରକ କୋଣର ପରିମାଣ କେତେ ହେବ ?

(ଖ) ବିଭାଗ

8. (i) $m\angle ABC = x$ ଓ $\angle ABC$ ର ଅନୁପୂରକ କୋଣର ପରିମାଣ $2x^0$ ହେଲେ x ର ମାନ ଡିଗ୍ରୀରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(ii) ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ, ଏହାର ପରିପୂରକ କୋଣର ପରିମାଣର ଦୁଇଗୁଣରୁ 18^0 ଅଧିକ ହେଲେ କୋଣଟିର ପରିମାଣ କେତେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iii) ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ, ତାହାର ପରିପୂରକ କୋଣର ପରିମାଣର ଏକ ପଞ୍ଚମାଂଶ ହେଲେ କୋଣଟିର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।

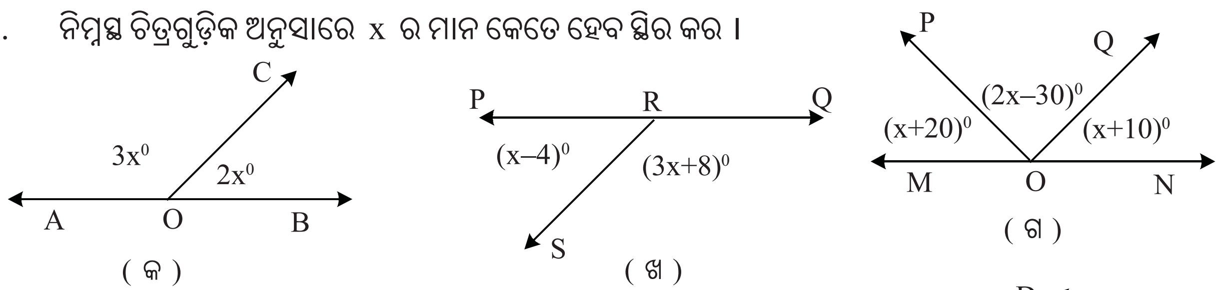
(iv) ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରକ କୋଣର ପରିମାଣର ଅନୁପାତ 4:5 ହେଲେ କୋଣଦ୍ୱୟର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(v) ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ, ତାହାର ପରିପୂରକ କୋଣର ପରିମାଣ ଠାରୁ 20^0 କମ୍ ହେଲେ, କୋଣଟିର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(vi) ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରକ କୋଣର ପରିମାଣର ଅନ୍ତର 30^0 ହେଲେ କୋଣଦ୍ୱୟର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।

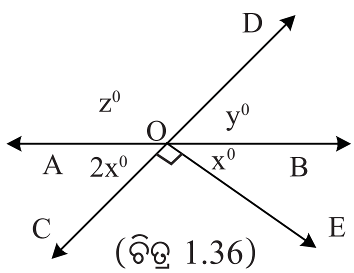
(vii) ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ ତାହାର ଅନୁପୂରକ କୋଣ ପରିମାଣର ଏକ ପଞ୍ଚମାଂଶ ହେଲେ, କୋଣଟିର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

9. ନିମ୍ନସ୍ଥ ଚିତ୍ରଗୁଡ଼ିକ ଅନୁସାରେ x ର ମାନ କେତେ ହେବ ସ୍ଥିର କର ।



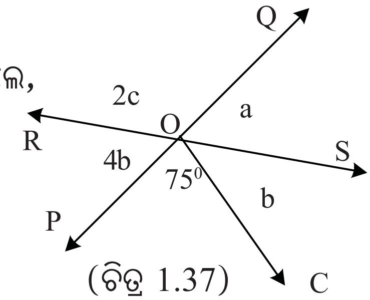
(ଚିତ୍ର 1.35)

10. ଦତ୍ତ ଚିତ୍ରରେ $\overleftrightarrow{AB}$ ଓ $\overleftrightarrow{CD}$ ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । $m\angle COE = 90^0$ ହେଲେ x, y ଓ z ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



(ଚିତ୍ର 1.36)

11. ଦତ୍ତ ଚିତ୍ରରେ $\overleftrightarrow{PQ}$ ଓ $\overleftrightarrow{RS}$ ଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ O ଓ $m\angle POC = 75^0$ ହେଲେ, a, b ଏବଂ c ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



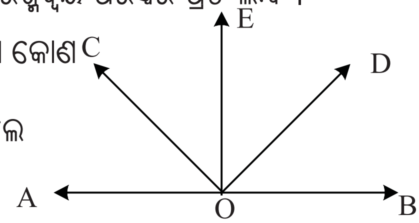
(ଚିତ୍ର 1.37)

(ଗ) ବିଭାଗ

12. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, ଦୁଇଟି ପ୍ରତୀପ କୋଣର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଏକ ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଦୁଇଟି ବିପରୀତ ରଶ୍ମିହେବେ ।

13. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରକ କୋଣର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ରଶ୍ମିଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।

14. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ $\angle AOE$ ଏବଂ $\angle EOB$ ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରଣ କୋଣ ଓ $\overrightarrow{OC}$, $\angle AOE$କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ । $m\angle COD = 90^0$ ହେଲେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $\overrightarrow{OD}$, $\angle EOB$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ହେବ ।

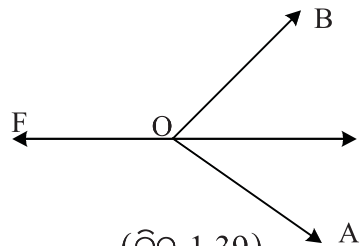


(ଚିତ୍ର 1.38)

15. $\overleftrightarrow{AB}$ ଓ $\overleftrightarrow{CD}$ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । $\angle AOC$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overrightarrow{OX}$ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overleftrightarrow{XO}$ କୋଣ BOD କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ।

16. $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ରଶ୍ମି । କେଣସି ରଶ୍ମି ଅନ୍ୟ ରଶ୍ମି ଦୁଇଟି ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ କୋଣର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ବିସ୍ତୃତ ନୁହେଁ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $m\angle AOB + m\angle BOC + m\angle COA = 360^0$

17. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ $\overrightarrow{OE}$, $\angle AOB$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ରଶ୍ମି । $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{OE}$ ର ବିପରୀତ ରଶ୍ମି ହେଲେ, ଦର୍ଶାଅଯେ, $m\angle BOF = m\angle AOF$



(ଚିତ୍ର 1.39)

1.7 ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା (Parallel Lines)

ସଂଜ୍ଞା: ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ସରଳରେଖା ଯଦି ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରୁ ନଥାନ୍ତି, ତେବେ ସେମାନଙ୍କୁ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା କୁହାଯାଏ । ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ରଶ୍ମି କିମ୍ବା ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ମଧ୍ୟ ସମାନ୍ତର କୁହାଯାଏ ।

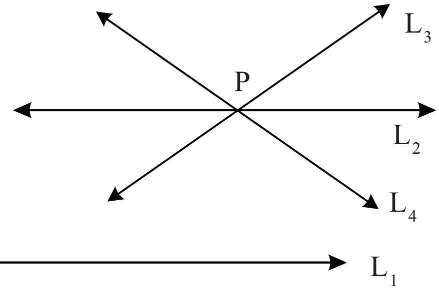
L_1 ଓ L_2 ରେଖାଦ୍ୱୟ ଯଦି ସମାନ୍ତର ହୁଅନ୍ତି ତେବେ ସଙ୍କେତରେ $L_1 \parallel L_2$ ଲେଖାଯାଏ ।

ସଂଜ୍ଞାନୁଯାୟୀ $L_1 \parallel L_2$ ହେଲେ $L_2 \parallel L_1$ ହେବ ।

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ - 9 : ସମାନ୍ତର ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ (Parallel Postulate) :

ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖାର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟଦେଇ ତାହାପ୍ରତି ସମାନ୍ତର ହେଉଥିବା କେବଳ ମାତ୍ର ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଅବସ୍ଥିତ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ : ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରୁ ସମାନ୍ତର ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟକୁ ସହଜରେ ଉପଲବ୍ଧି କରିହେବ । L_1 ର ବହିଃସ୍ଥ P ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟଦେଇ ଯେତେ ସରଳରେଖା ଅବସ୍ଥିତ, ସେ ସବୁ ମଧ୍ୟରୁ L_2 ଛଡା ଆଉ କୌଣସିଟି L_1 ସହ ସମାନ୍ତର ନୁହେଁ।



(ଚିତ୍ର 1.40)

ବି.ଦ୍ର. : ସମାନ୍ତର ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଜ୍ୟାମିତି ଶାସ୍ତ୍ରରେ ଗୋଟିଏ ଅତି ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ । ସମତଳ ଉପରେ ଅଙ୍କିତ ସଳଖ ଗାରକୁ ସରଳରେଖାର ଏକମାତ୍ର ଅର୍ଥ ବୋଲି ଗ୍ରହଣ କରି ଯେଉଁ ଜ୍ୟାମିତି ଆଲୋଚନା କରାଯାଏ, ତାହାକୁ ଇଉକ୍ଲିଡୀୟ ଜ୍ୟାମିତି କୁହାଯାଏ । ଆଗରୁ କୁହାଯାଇଛି ସରଳରେଖା ବିନ୍ଦୁ ମାନଙ୍କର ସେଟ୍ । ତେଣୁ ଏହାର ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ଅନେକ ପ୍ରକାର ଅର୍ଥ ମଧ୍ୟ ସମ୍ଭବ । ସେ ସବୁ ଅର୍ଥକୁ ନେଇ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାର ଅଣଇଉକ୍ଲିଡୀୟ ଜ୍ୟାମିତି (Non-Euclidean Geometries) ମଧ୍ୟ ସୃଷ୍ଟି ହୋଇଛି । ଯାହାର ପ୍ରୟୋଗ ମହାକାଶ ଅଧ୍ୟୟନ ଆଦି ବୃହତ୍ତର ପରିସରରେ କରାଯାଏ । ଏ ସବୁ ଜ୍ୟାମିତିରେ ସମାନ୍ତର ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଗ୍ରହଣୀୟ ନୁହେଁ ।

ପରବର୍ତ୍ତୀ ଉପପାଦ୍ୟ ସମାନ୍ତର ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଉପରେ ଆଧାରିତ ।

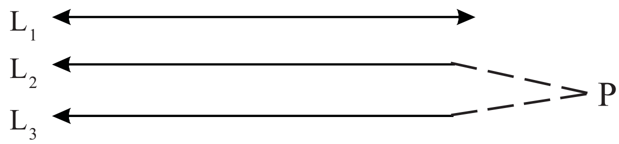
ଉପପାଦ୍ୟ - 3

ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ଓ ପରସ୍ପର ଠାରୁ ପୃଥକ୍ ଯେଉଁ ସବୁ ସରଳରେଖା ଅନ୍ୟ ଏକ ସରଳରେଖା ସହ ସମାନ୍ତର, ସେମାନେ ପରସ୍ପର ସମାନ୍ତର ।

(Distinct coplanar lines parallel to a given line are parallel to one another)

ଦତ୍ତ: L_1. L_2 ଓ L_3 ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ପୃଥକ୍ ସରଳରେଖା ।

$L_2 \parallel L_1$, $L_3 \parallel L_1$



ପ୍ରାମାଣ୍ୟ: $L_2 \parallel L_3$

ପ୍ରମାଣ: ମନେକର L_2 ଓ L_3 ସମାନ୍ତର ନୁହନ୍ତି ।

(ଚିତ୍ର 1.41)

$\therefore$ ସେମାନେ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରିବେ । ମନେକର L_2 ଓ L_3 ର ଛେଦବିନ୍ଦୁ P , $L_1 \parallel L_2$ ହୋଇଥିବାରୁ L_1 ଓ L_2 ଅଣଛେଦୀ, ତେଣୁ P, L_1 ର ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ।

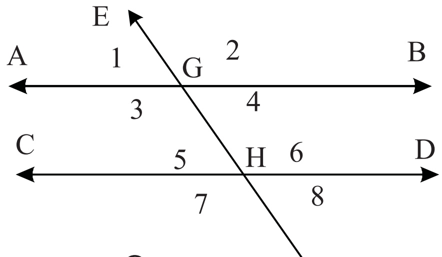
L_1 ର ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ରେଖା L_2 ଓ L_3 , L_1 ସହ ସମାନ୍ତର, ମାତ୍ର ସମାନ୍ତର ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଅନୁଯାୟୀ ଏହା ଅସମ୍ଭବ ।

ତେଣୁ $L_2 \parallel L_3$ (ପ୍ରମାଣିତ)

1.8 ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା ଓ ସେମାନଙ୍କର ଛେଦକ (Parallel Lines and their transversals) :

ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଦୁଇ ବା ତତୋଽଧିକ ସମାନ୍ତର ରେଖାକୁ ଛେଦ କଲେ ତାହାକୁ ସମ୍ପୃକ୍ତ ସମାନ୍ତର ରେଖା ମାନଙ୍କର ଛେଦକ (transversal) କୁହାଯାଏ ।

ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ରେଖାକୁ ଗୋଟିଏ ଛେଦକ ଛେଦକଲେ, ଯେଉଁ ଆଠଗୋଟି କୋଣ ସୃଷ୍ଟି ହୁଏ, ସେମାନଙ୍କୁ ଯୋଡା ଯୋଡା କରି ଦୁଇପ୍ରକାର ନାମରେ ନାମିତ କରାଯାଏ । ଯଥା - ଏକାନ୍ତର କୋଣ (alternate angles) ଓ ଅନୁରୂପ କୋଣ (corrresponding angles) । ଦତ୍ତ ଚିତ୍ରରେ ସଂପୃକ୍ତ କୋଣ ମାନଙ୍କର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଗୁଡିକ 1 ରୁ 8 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନିତ କରାଯାଇଛି । ଏକାନ୍ତର ଓ ଅନୁରୂପ ଭେଦରେ କୋଣ ଯୋଡା ଗୁଡିକ ହେଲେ :



(ଚିତ୍ର 1.42)

ଏକାନ୍ତର କୋଣ (Alternate angles)

(i) ∠AGH ଓ ∠GHD (ଅନ୍ତର୍ଦେଶ 3 ଓ 6)

(ii) ∠BGH ଓ ∠GHC (ଅନ୍ତର୍ଦେଶ 4 ଓ 5)

ଅନୁରୂପ କୋଣ (Corresponding angles)

(i) ∠EGB ଓ ∠GHD (ଅନ୍ତର୍ଦେଶ 2 ଓ 6) (ii) ∠DHF ଓ ∠BGH (ଅନ୍ତର୍ଦେଶ 8 ଓ 4)

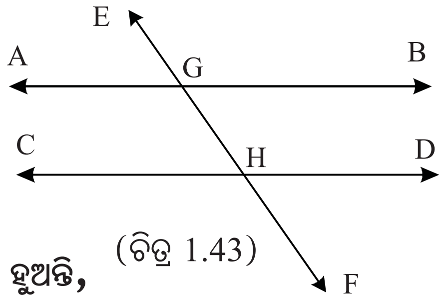
(iii) ∠EGA ଓ ∠GHC (ଅନ୍ତର୍ଦେଶ 1 ଓ 5) (iv) ∠CHF ଓ ∠AGH (ଅନ୍ତର୍ଦେଶ 7 ଓ 3)

ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣ (Interior Angles) ଓ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ (Exterior angles)

ଦତ୍ତଚିତ୍ରରେ 3,4,5 ଓ 6 ଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନିତ ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ବିଶିଷ୍ଟ କୋଣଗୁଡ଼ିକୁ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣ କୁହାଯାଏ ଓ ଅବଶିଷ୍ଟ କୋଣମାନଙ୍କୁ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ କୁହାଯାଏ । ଅର୍ଥାତ୍ ∠AGH, ∠BGH, ∠GHC ଓ ∠GHD ହେଉଛନ୍ତି ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣ ଓ ଅନ୍ୟ ଚାରିଗୋଟି କୋଣ ବହିଃସ୍ଥ ଅଟନ୍ତି ।

ବିଶେଷ ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : $\overleftrightarrow{AB}$ ଓ $\overleftrightarrow{CD}$ ସମାନ୍ତର ନ ହୋଇଥିଲେ ମଧ୍ୟ ସେମାନଙ୍କର ଛେଦକ $\overleftrightarrow{EF}$ ଦ୍ୱାରା ସୃଷ୍ଟି ହେଉଥିବା ଆଠଗୋଟି କୋଣକୁ ଉପରୋକ୍ତ ମତେ ଏକାନ୍ତର, ଅନୁରୂପ ତଥା ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଓ ବହିଃସ୍ଥ ଭେଦରେ ନାମିତ କରାଯାଏ ।

ଦୁଇଟି ସରଳ ରେଖାର ଛେଦକ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେକ ଜ୍ଞାତବ୍ୟ ବିଷୟ :



(ଚିତ୍ର 1.43)

ତଥ୍ୟ -1 : ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା ଓ ଗୋଟିଏ ଛେଦକ ଦ୍ୱାରା ସୃଷ୍ଟି ହେଉଥିବା

(i) ଯେକୌଣସି ଏକାନ୍ତର କୋଣ ଯୋଡ଼ା ସମପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ ହୁଅନ୍ତି,

ଅର୍ଥାତ୍ ଦତ୍ତ ଚିତ୍ରରେ m∠AGH = m∠GHD ଓ m∠BGH = m∠GHC

(ii) **ଯେକୌଣସି ଅନୁରୂପ କୋଣ ଯୋଡ଼ା ସମପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ ହୁଅନ୍ତି,** ଅର୍ଥାତ୍ ଦତ୍ତ ଚିତ୍ରରେ

m∠EGB = m∠GHD, m∠DHF = m∠BGH, m∠EGA = m∠GHC ଓ m∠CHF = m∠AGH

(iii) **ଯେଉଁ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଛେଦକର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ, ସେମାନେ ପରସ୍ପର ପରିପୂରକ,** ଅର୍ଥାତ୍ $m\angle AGH + m\angle CHG = 180^0$ ଓ $m\angle BGH + m\angle DHG = 180^0$ ଅଟେ ।

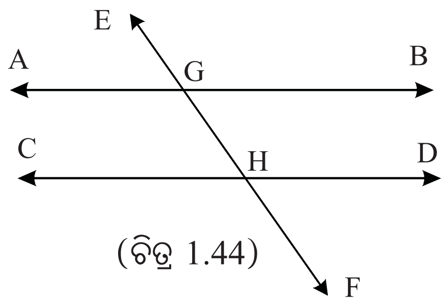
ଉପରୋକ୍ତ ତଥ୍ୟର ବିପରୀତ ଉକ୍ତି ମଧ୍ୟ ସତ୍ୟ ଅଟେ । ତାହା ନିମ୍ନରେ ଦିଆଗଲା ।

ତଥ୍ୟ - 2 : ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା ଓ ସେମାନଙ୍କର ଗୋଟିଏ ଛେଦକ ଦ୍ୱାରା ସୃଷ୍ଟି ହେଉଥିବା

(i) ଯେକୌଣସି ଏକାନ୍ତର କୋଣ ଯୋଡ଼ା ଯଦି ସମପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ ହୁଅନ୍ତି

କିମ୍ବା (ii) ଯେକୌଣସି ଅନୁରୂପ କୋଣ ଯୋଡ଼ା ଯଦି ସମପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ ହୁଅନ୍ତି

କିମ୍ବା (iii) ଯେଉଁ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଛେଦକର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ, ସେମାନେ ଯଦି ପରସ୍ପର ପରିପୂରକ ହୁଅନ୍ତି; ତେବେ ସମ୍ପୃକ୍ତ ରେଖାଦ୍ୱୟ ସମାନ୍ତର ଅଟନ୍ତି ।



(ଚିତ୍ର 1.44)

ଦତ୍ତ ଚିତ୍ରକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

ଉପରୋକ୍ତ ତଥ୍ୟ ଅନୁଯାୟୀ,

(i) $m\angle AGH = m\angle GHD$

କିମ୍ବା $m\angle BGH = m\angle GHC \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

(ii) $m\angle EGB = m\angle GHD$ ବା $m\angle DHF = m\angle BGH$ ବା $m\angle EGA = m\angle GHC$

ବା $m\angle CHF = m\angle AGH \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

(iii) $m\angle AGH + m\angle CHG = 180^0$ କିମ୍ବା $m\angle BGH + m\angle DHG = 180^0 \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

ଉପରୋକ୍ତ ତଥ୍ୟ ଦ୍ୱୟର ପ୍ରମାଣ କରିବାର ଅବ୍ୟବହିତ ପୂର୍ବରୁ ଆମେ ବର୍ତ୍ତମାନ ପାଇଁ ଗୋଟିଏ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ପ୍ରଥମେ ଅବଗତ ହେବା ।

ଅନୁରୂପ କୋଣ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ :

ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ଦୁଇଟି ସରଳରେଖାକୁ ଏକ ଛେଦକ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକଲେ, ଯଦି ଦୁଇଟି ଅନୁରୂପ କୋଣର ପରିମାଣ ସମାନ ହୁଏ, ତେବେ ସରଳରେଖା ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ହେବେ । ଏହାର ବିପରୀତ ଉକ୍ତି ମଧ୍ୟ ସତ୍ୟ । ତାହା ହେଉଛି-

ଉପପାଦ୍ୟ - 4

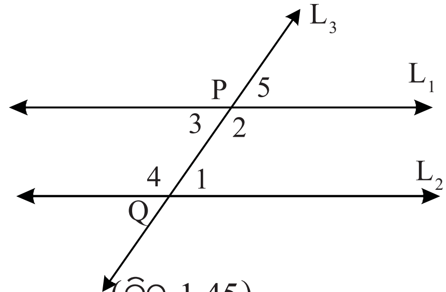
ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାକୁ ଏକ ଛେଦକ ଛେଦକଲେ, ଯେ କୌଣସି ଦୁଇଟି ଅନୁରୂପ କୋଣର ପରିମାଣ ସମାନ ହୁଏ ।

ଏହି ଉକ୍ତିଟି ପ୍ରୋଟ୍ରାକ୍ଟର-ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ, ଅନୁରୂପ କୋଣ-ସ୍ୱାକାର୍ଯ୍ୟ ଓ ସମାନ୍ତର-ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ସାହାଯ୍ୟରେ ପ୍ରମାଣିତ ହୋଇପାରିବ । ଏଠାରେ ପ୍ରମାଣ ଦିଆଯାଉ ନାହିଁ ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 5

ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାକୁ ଏକ ଛେଦକ ଛେଦକଲେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଯୋଡ଼ା ଏକାନ୍ତର କୋଣର ପରିମାଣ ସମାନ ହୁଏ ।

(If a transversal intersects two parallel lines, then each pair of alternate angles are of equal measure.)



(ଚିତ୍ର 1.45)

ଦତ୍ତ : $L_1 \parallel L_2$ ଏବଂ L_3 ସେମାନେ ଛେଦକ ।

$\angle 1$ ଓ $\angle 3$, $\angle 2$ ଓ $\angle 4$ ଦୁଇ ଯୋଡ଼ା ଏକାନ୍ତରକୋଣ ଅଟନ୍ତି ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $m\angle 1 = m\angle 3$ ଏବଂ $m\angle 2 = m\angle 4$

ପ୍ରମାଣ : $\angle 3$ ଭିନ୍ନ $\angle 2$ ର ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରକ କୋଣକୁ $\angle 5$ ଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନିତ କରାଯାଉ ।

$L_1 \parallel L_2$ ହେତୁ $m\angle 5 = m\angle 1$ (ଅନୁରୂପକୋଣ)

କିନ୍ତୁ $m\angle 5 = m\angle 3$ (ପ୍ରତୀପକୋଣ)

$\therefore m\angle 1 = m\angle 3$

ସେହିପରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରେ ଯେ, ଅନ୍ୟଯୋଡ଼ା ଏକାନ୍ତର କୋଣର ପରିମାଣ ସମାନ

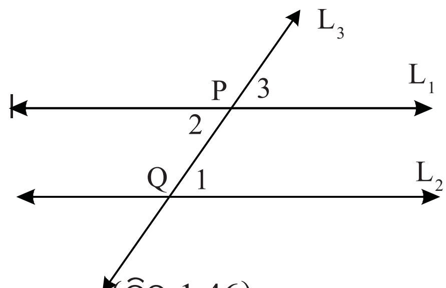
ଅର୍ଥାତ୍ $m\angle 2 = m\angle 4$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉପପାଦ୍ୟ - 6

ଏକ ସମତଳରେ ଥିବା ଦୁଇଟି ସରଳରେଖାକୁ ଏକ ଛେଦକ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକଲେ, ଯଦି ଦୁଇଟି ଏକାନ୍ତର କୋଣର ପରିମାଣ ସମାନ ହୁଏ, ତେବେ ସରଳରେଖା ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ।

(If a transversal intersects two coplanar lines and a pair of alternate angles are of equal measure then those two straight lines are parallel.)

ଦତ୍ତ : ଏକ ସମତଳରେ ଥିବା L_1 ଓ L_2 ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା L_3 ଦ୍ୱାରା ଯଥାକ୍ରମେ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦିତ ହୋଇଛନ୍ତି । $\angle 1$ ଓ $\angle 2$ ଏକଯୋଡ଼ା ଏକାନ୍ତରକୋଣ ଏବଂ $m\angle 1 = m\angle 2$ ।



(ଚିତ୍ର 1.46)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $L_1 \parallel L_2$

ପ୍ରମାଣ : $\angle 2$ ର ପ୍ରତୀପ କୋଣକୁ 3 ଦ୍ୱାରା ନାମିତ କରାଯାଉ ।

ଚିତ୍ର 1.46 ରେ $m\angle 2 = m\angle 3$ (ପ୍ରତୀପ କୋଣ)

$m\angle 2 = m\angle 1$ (ଦତ୍ତ) $\therefore m\angle 3 = m\angle 1$

କିନ୍ତୁ ଏମାନେ ଅନୁରୂପକୋଣ ।

$\therefore L_1 \parallel L_2$ (ଅନୁରୂପକୋଣ-ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ) (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉପପାଦ୍ୟ - 7

ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାକୁ ଏକ ଛେଦକ ଛେଦକଲେ, ଛେଦକର ଏକପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣଦ୍ୱୟର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 180^0 ।

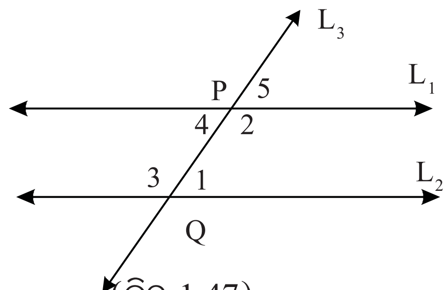
(If a transversal intersects two parallel lines, then the sum of the measures of two interior angles on the same side of the transversal is 180^0.)

ଦତ୍ତ : $L_1 \parallel L_2$ ଏବଂ L_3 ଛେଦକ L_1 ଓ L_2 କୁ ଯଥାକ୍ରମେ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ ।

L_3 ଛେଦକର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଅନ୍ତଃସ୍ଥକୋଣ $\angle 2$, $\angle 1$ ଏବଂ ଅନ୍ୟପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣ $\angle 4$, $\angle 3$ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $m\angle 1 + m\angle 2 = 180^0$ ଏବଂ $m\angle 3 + m\angle 4 = 180^0$

$\angle 4$ ର ପ୍ରତୀପ କୋଣକୁ 5 ଦ୍ୱାରା ନାମିତ କରାଯାଉ ।



(ଚିତ୍ର 1.47)

ପ୍ରମାଣ : (ଚିତ୍ର 1.47 ରେ) $m\angle 2 + m\angle 5 = 180^0$ (ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରକ)

$L_1 \parallel L_2$ ହେତୁ $m\angle 5 = m\angle 1$ (ଅନୁରୂପ କୋଣ)

$\therefore m\angle 2 + m\angle 1 = 180^0$

ସେହିପରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରେ ଯେ, $m\angle 3 + m\angle 4 = 180^0$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉପପାଦ୍ୟ - 8

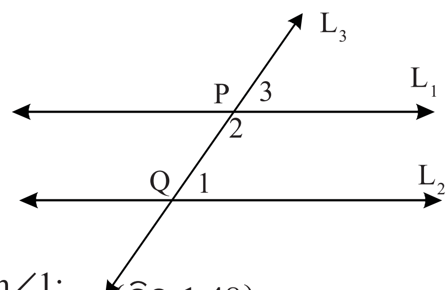
ଏକ ସମତଳରେ ଥିବା ଦୁଇଟି ସରଳରେଖାକୁ ଏକ ଛେଦକ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକଲେ, ଯଦି ଛେଦକର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣଦ୍ୱୟର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 180^0 ହୁଏ, ତେବେ ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟ ସମାନ୍ତର ।

(If a transversal intersects two coplanar lines and the sum of the measures of a pair of interior angles on the same side of it, is 180^0 then two lines are parallel.)

ଦତ୍ତ : ଏକ ସମତଳରେ ଥିବା L_1 ଓ L_2 ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟକୁ L_3 ଛେଦକ ଯଥାକ୍ରମେ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଛି ।

L_3 ଛେଦକର ଏକପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଏକଯୋଡ଼ା ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣଦ୍ୱୟ $\angle 1$ ଏବଂ $\angle 2$ ।

$m\angle 1 + m\angle 2 = 180^0$



(ଚିତ୍ର 1.48)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $L_1 \parallel L_2$

ପ୍ରମାଣ : (ଚିତ୍ର 1.48 ରେ) $m\angle 2 + m\angle 3 = 180^0$ (ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରକ କୋଣ)

$m\angle 2 + m\angle 1 = 180^0$ (ଦତ୍ତ)

$\therefore m\angle 2 + m\angle 3 = m\angle 2 + m\angle 1 \Rightarrow m\angle 3 = m\angle 1$;

କିନ୍ତୁ, ଏମାନେ ଅନୁରୂପକୋଣ । $\therefore L_1 \parallel L_2$ (ଅନୁରୂପ କୋଣ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ) (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1(c)

(କ) ବିଭାଗ

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକ ଠିକ୍ ବା ଭୁଲ୍ ଲେଖ :

(a) $L_1 \parallel L_2$ ଓ $L_2 \parallel L_3$ ହେଲେ $L_1 \parallel L_3$

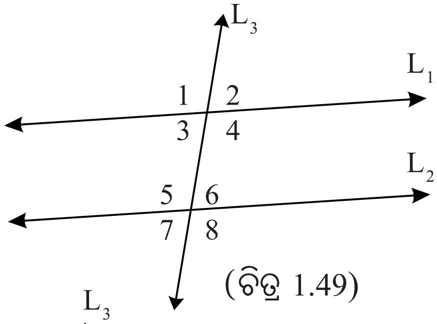
(b) $L_1 \perp L_2$ ଓ $L_2 \perp L_3$ ହେଲେ $L_1 \perp L_3$

(c) $L_1 = L_2$ ହେଲେ $L_1 \parallel L_2$ (ସୂଚନା : $L_1 = L_2$ ର ଅର୍ଥ ହେଉଛି L_1 ଓ L_2 ରେଖା ଏକ ଅଭିନ୍ନ । ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା ସଂଜ୍ଞା ବ୍ୟବହାର କର)

(d) ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

(e) $\angle ABC$ ଓ $\angle DEF$ ମଧ୍ୟରେ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{ED}$ ଓ $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{EF}$ ହେଲେ $m\angle ABC = m\angle DEF$ ହେବ ।

2. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 1.49 ରେ $L_1 \parallel L_2$ ଓ L_3 ସେମାନଙ୍କର ଛେଦକ । ଛେଦବିନ୍ଦୁରେ ଉତ୍ପନ୍ନକୋଣଗୁଡ଼ିକ 1, 2, 3 ....8 ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନିତ । $m\angle 3 = 65^0$ ହେଲେ, ଅନ୍ୟ କୋଣଗୁଡ଼ିକର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।



(ଚିତ୍ର 1.49)

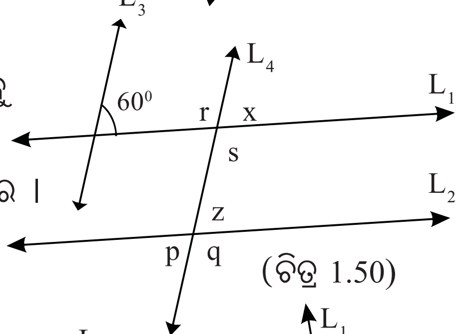
3. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 1.50 ରେ $L_1 \parallel L_2$ ଏବଂ $L_3 \parallel L_4$ ଚିତ୍ରରୁ ନିମ୍ନଲିଖିତ କୋଣଗୁଡ଼ିକର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କରି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନଗୁଡ଼ିକୁ ପୂରଣ କର ।

କୋଣଗୁଡ଼ିକର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କରି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନଗୁଡ଼ିକୁ ପୂରଣ କର ।

$m\angle x =$, $m\angle z =$

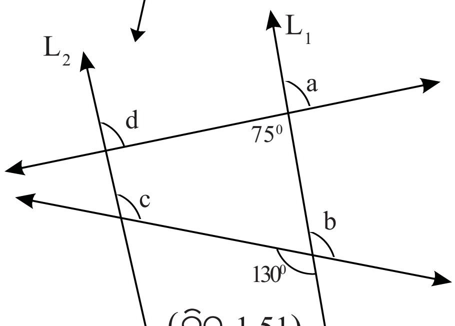
$m\angle p =$, $m\angle q =$

$m\angle r =$, $m\angle s =$



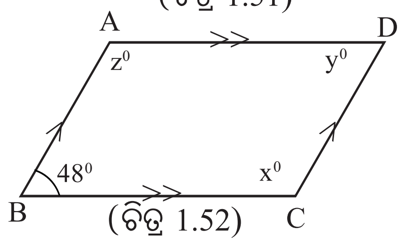
(ଚିତ୍ର 1.50)

4. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 1.51 ରେ $L_1 \parallel L_2$ । ଚିତ୍ରକୁ ବ୍ୟବହାର କରି a, b, c, d ଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନିତ କୋଣଗୁଡ଼ିକର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।



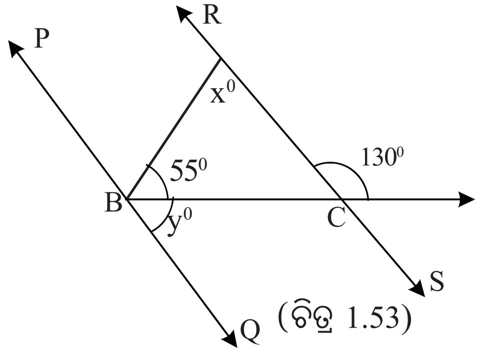
(ଚିତ୍ର 1.51)

5. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 1.52 ରେ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ଏବଂ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ । ଚିତ୍ରରୁ x,y,z ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।



(ଚିତ୍ର 1.52)

6. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 1.53 ରେ $\overline{PQ} \parallel \overline{RS}$ । $\overleftrightarrow{RS}$ କୁ $\overleftrightarrow{BN}$ C ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ଚିତ୍ରରୁ x ଓ y ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

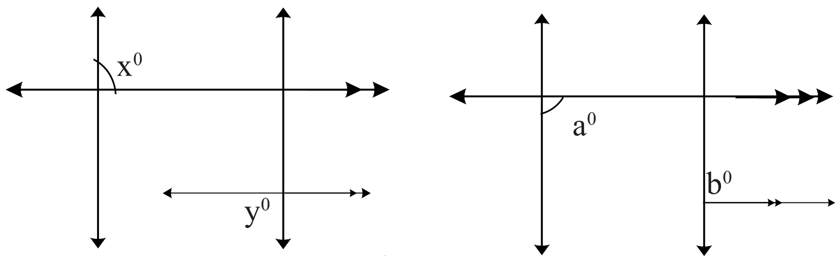


(ଚିତ୍ର 1.53)

7. ଚିତ୍ର 1.54 ରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚିତ୍ର ଦୁଇଯୋଡ଼ା ସମାନ୍ତର ରେଖାଦ୍ୱାରା ଗଠିତ ଏବଂ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚିତ୍ରରେ ଦୁଇଟି କୋଣର ପରିମାଣ ସଂକେତରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।

(i) ଚିତ୍ର 1.54 (a) ରୁ x ଓ y ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ବନ୍ଧ ସ୍ଥିର କର ।

(ii) ଚିତ୍ର 1.54 (b) ରୁ a ଓ b ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ବନ୍ଧ ସ୍ଥିର କର ।

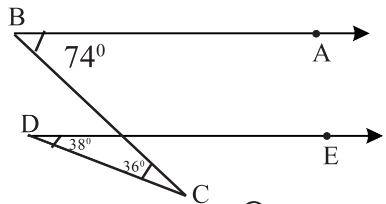


(ଚିତ୍ର 1.54)

(ଖ) ବିଭାଗ

8. (i) ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 1.55 ରେ $m\angle ABC = 74^0$, $m\angle EDC = 38^0$ $m\angle BCD = 36^0$ । ପ୍ରମାଣକର ଯେ, $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BA}$

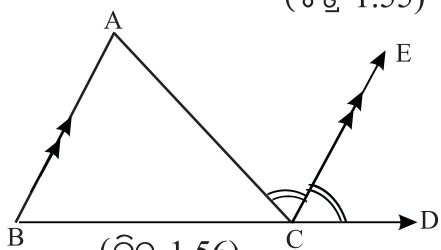
(ii) ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 1.55 ରେ $m\angle ABC = 60^0$, $m\angle EDC = 38^0$ ଏବଂ $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BA}$ ହେଲେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $m\angle BCD = 22^0$ ।



(ଚିତ୍ର 1.55)

9. (i) ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 1.56 ରେ ∠ACD ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overrightarrow{CE}$ $\overline{AB}$ ସହ ସମାନ୍ତର ହେଲେ,ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $m\angle A = m\angle B$

(ii) ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 1.56 ରେ $\overrightarrow{CE} \parallel \overline{AB}$, $m\angle ECD = 70^0$ ଏବଂ $m\angle A = 50^0$ ହେଲେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $m\angle ACB = 60^0$ ।



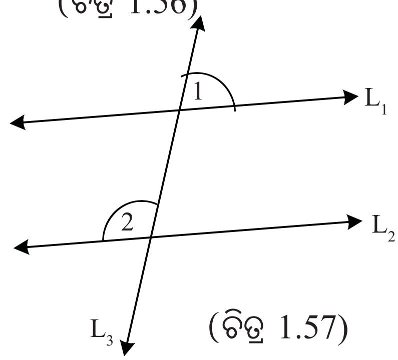
(ଚିତ୍ର 1.56)

10. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 1.57 ରେ $L_1 \parallel L_2$ ଓ L_1, L_2 ର ଛେଦକ L_3

(i) $m\angle 2 = 2m\angle 1$ ହେଲେ, ∠1 ଓ ∠2 ର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।

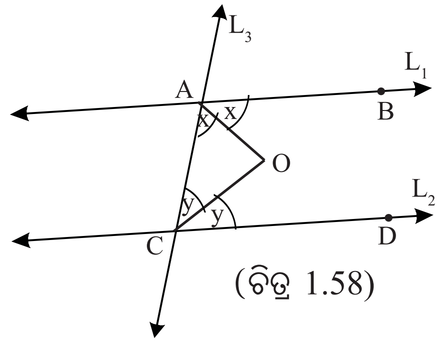
(ii) $m\angle 2 = 3m\angle 1$ ହେଲେ, ∠1 ଓ ∠2 ର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।

(iii) $m\angle 1 : m\angle 2 = 2 : 3$ ହେଲେ, ∠1 ଓ ∠2 ର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।



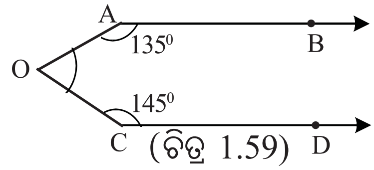
(ଚିତ୍ର 1.57)

11. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 1.58 ରେ $L_1 \parallel L_2$ । L_3 ଛେଦକ L_1 ଓ L_2 ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟକୁ ଯଥାକ୍ରମେ A ଓ C ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ । $\angle BAC$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଓ $\angle ACD$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରନ୍ତି । ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $m\angle AOC = 90^0$



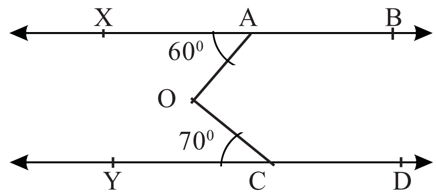
(ଚିତ୍ର 1.58)

12.(i) ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 1.59 ରେ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, $m\angle OAB = 135^0$, $m\angle OCD = 145^0$ ହେଲେ $\angle AOC$ ର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।



(ଚିତ୍ର 1.59)

(ii) ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ $\overleftrightarrow{XB} \parallel \overleftrightarrow{YD}$, $m\angle XAO = 60^0$, $m\angle YCO = 70^0$ ହେଲେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $m\angle AOC = 130^0$



(ଗ) ବିଭାଗ

13. ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଅନ୍ୟ ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାକୁ ଛେଦକଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,
(i) ଯେକୌଣସି ଏକାନ୍ତର କୋଣ ଦୁଇଟିର ଅନ୍ତଃସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ସମାନ୍ତର ।
(ii) ଯେକୌଣସି ଅନୁରୂପ କୋଣ ଦୁଇଟିର ଅନ୍ତଃସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ସମାନ୍ତର ।

14. ΔABC ର $m\angle B = m\angle C$, $\overline{BC}$ ସହ ସମାନ୍ତର କରି ଅଙ୍କିତ ସରଳରେଖା $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ କୁ ଯଥାକ୍ରମେ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $m\angle APQ = m\angle AQP$ ।

15. ଗୋଟିଏ କୋଣର ଦୁଇବାହୁ ଅନ୍ୟ ଏକ କୋଣର ଦୁଇବାହୁ ସହ ସମାନ୍ତର ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, କୋଣଦ୍ୱୟ ସମପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ ବା ପରିପୂରକ ହେବେ ।

16. ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାକୁ ଛେଦ କରି ସେଥିମଧ୍ୟରୁ କୌଣସି ଗୋଟିଏ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ତାହା ଅନ୍ୟଟି ପ୍ରତି ମଧ୍ୟ ଲମ୍ବ ହେବ ।

1.9 ତ୍ରିଭୁଜର କୋଣ ଏବଂ ଏହାର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ (Angles of a triangle and its exterior angles):

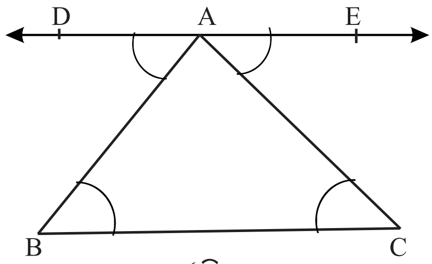
ଉପପାଦ୍ୟ - 9

ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିକୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 180^0 ।

(The sum of the measures of the three angles of a triangle is 180^0)

ଦତ୍ତ : ABC କୌଣସି ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^0$



(ଚିତ୍ର 1.60)

ଅଙ୍କନ : A ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟ ଦେଇ $\overleftrightarrow{DE}$ ଅଙ୍କନ କର ଯେପରିକି

$\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ ଏବଂ D - A - E (A, D ଓ E ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀବିନ୍ଦୁ)

ଏବଂ D ବିନ୍ଦୁ $\overleftrightarrow{AC}$ ର B ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେବ ।

ପ୍ରମାଣ : ଅଙ୍କନ ଅନୁଯାୟୀ B, $\angle DAC$ ର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

$m\angle DAB + m\angle BAC = m\angle DAC$

(ପ୍ରୋଟ୍ରାକ୍ଟର - ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ) .... (i)

$\overrightarrow{AC}$ ର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ A, $\overleftrightarrow{DE}$ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

$m\angle DAC + m\angle CAE = 180^0$ (ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରକ କୋଣ) ......(ii)

(i) ଓ (ii) ରୁ ମିଳିଲା, $m\angle DAB + m\angle BAC + m\angle CAE = 180^0$......(iii)

$\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ ଓ $\overline{AB}$ ସେମାନଙ୍କର ଛେଦକ ।

$m\angle DAB = m\angle ABC$ (ଏକାନ୍ତର) ......(iv)

ସେହିପରି $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ ଓ $\overline{AC}$ ସେମାନଙ୍କର ଛେଦକ ।

$\therefore m\angle CAE = m\angle ACB$ (ଏକାନ୍ତର) ......(v)

(iii), (iv) ଓ (v) ରୁ ମିଳିଲା, $m\angle ABC + m\angle BAC + m\angle ACB = 180^0$

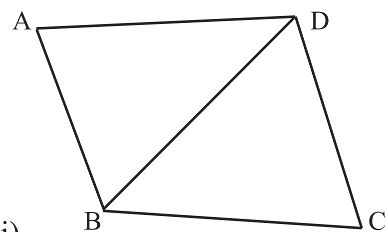
ଅର୍ଥାତ୍ ΔABC ରେ, $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^0$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : 1. ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ଅନୁପୂରକ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : 2. ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜରେ ଗୋଟିକରୁ ଅଧିକ ସମକୋଣ ବା ସ୍ଥୁଳକୋଣ ରହିପାରିବ ନାହିଁ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : 3. ଏକ ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଚାରିକୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 360^0 ।

ଅଷ୍ଟମ ଶ୍ରେଣୀରେ ତୁମେମାନେ ପରୀକ୍ଷାମୂଳକ ପ୍ରମାଣ ମାଧ୍ୟମରେ ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : 3 ର ସତ୍ୟତା ଉପଲବ୍ଧି କରିସାରିଛି । ଆସ ଏହାର ଯୁକ୍ତିମୂଳକ ପ୍ରମାଣଟିକୁ ଜାଣିବା ।



(ଚିତ୍ର 1.61)

ଦତ୍ତ : ABCD ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ: $m\angle ABC + m\angle BCD + m\angle ADC + m\angle BAD = 360^0$

ଅଙ୍କନ : ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣ ଅଙ୍କନ କର ।

ΔADB ରେ $m\angle ABD + m\angle BDA + m\angle BAD = 180^0$ ....(i)

ସେହିପରି ΔCBD ରେ $m\angle CBD + m\angle BDC + m\angle BCD = 180^0$ ....(ii)

(i) ଓ (ii) ରୁ $(m\angle ABD + m\angle CBD) + m\angle BCD +$

$(m\angle BDC + m\angle BDA) + m\angle BAD = 180^0 + 180^0$ ....(iii)

ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ଉତ୍ତଳ ହୋଇଥିବାରୁ B, $\angle ADC$ ର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ଓ D, $\angle ABC$ ର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

$m\angle ABD + m\angle CBD = m\angle ABC$ ଓ

$m\angle BDA + m\angle BDC = m\angle ADC$ (ପ୍ରୋଟ୍ରାକ୍ଟର - ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ) ....(iv)

(iii) ଓ (iv) ରୁ ମିଳିଲା, $m\angle ABC + m\angle BCD + m\angle ADC + m\angle BAD$

$= 180^0 + 180^0 = 360^0$ (ପ୍ରମାଣିତ)

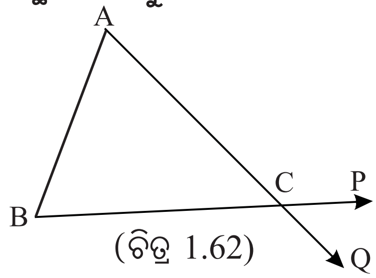
ତ୍ରିଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥକୋଣ (Exterior angle of a triangle)

ପୂର୍ବରୁ ତୁମେମାନେ ତ୍ରିଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥକୋଣ ସଂପର୍କରେ ଜାଣିଛ । ଆସ ତାକୁ ମନେପକାଇବା ।

ସଂଜ୍ଞା : ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତଃସ୍ଥକୋଣର ସନ୍ନିହିତପରିପୂରକ କୋଣକୁ ତ୍ରିଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ କୁହାଯାଏ ।

ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ $\overrightarrow{CB}$ ର ବିପରୀତ ରଶ୍ମି $\overrightarrow{CP}$ ହେଲେ $\angle ACB$ ର ଏକ ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରକ $\angle ACP$ ମିଳିଥାଏ ।

ସେହିପରି $\overrightarrow{CA}$ ର ବିପରୀତ ରଶ୍ମି $\overrightarrow{CQ}$ ହେଲେ $\angle ACB$ ର ଅନ୍ୟ ଏକ ସନ୍ନିହିତପରିପୂରକ $\angle BCQ$ ମିଳିଥାଏ ।



(ଚିତ୍ର 1.62)

$\overrightarrow{BP}$ ଓ $\overrightarrow{AQ}$ ର ଛେଦବିନ୍ଦୁ C ହେତୁ $\angle ACP$ ଓ $\angle BCQ$ ଏକ ଯୋଡ଼ା ପ୍ରତୀପ କୋଣ । ଫଳରେ ସେଦ୍ୱୟର ପରିମାଣ ସମାନ ।

ସଂଜ୍ଞାନୁଯାୟୀ ΔABC ର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ C ରେ ସୃଷ୍ଟି ହେଉଥିବା ବହିଃସ୍ଥ କୋଣଦ୍ୱୟ $\angle ACP$ ଓ $\angle BCQ$ । ଲକ୍ଷ୍ୟକର ΔABC ର $\angle PCQ$ ଏକ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ନୁହେଁ ।

ΔABC ର $\angle B$ ଓ $\angle C$ କୁ A ଠାରେ ଥିବା ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ଅନ୍ତସ୍ଥ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ କୋଣ (Remote interior angles) କୁହାଯାଏ । ସେହିପରି $\angle C$ ଓ $\angle A$ କୁ B ଠାରେ ଥିବା ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ କୋଣ ଏବଂ $\angle A$ ଓ $\angle B$ କୁ C ଠାରେ ଥିବା ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ କୋଣ କୁହାଯାଏ ।

ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ଉତ୍ପନ୍ନ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ଏବଂ ଏହାର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ କୋଣଦ୍ୱୟର ପରିମାଣ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସଂପର୍କକୁ ତୁମେ ପରୀକ୍ଷାମୂଳକ ପ୍ରମାଣ ମାଧ୍ୟମରେ ଜାଣିସାରିଛ । ବର୍ତ୍ତମାନ ନିମ୍ନ ଯୁକ୍ତିମୂଳକ ପ୍ରମାଣକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କର ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 10

ତ୍ରିଭୁଜର କୌଣସି ଏକ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ଏହାର ଅନ୍ତସ୍ଥ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ କୋଣଦ୍ୱୟର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି ସହ ସମାନ ।

(The measure of the exterior angle of a triangle is equal to the sum of the measures of its remote interior angles.)

ଦତ୍ତ : ΔABC ର C ବିନ୍ଦୁରେ ବହିଃସ୍ଥକୋଣ $\angle ACD$ ।
ଏହାର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ କୋଣଦ୍ୱୟ $\angle A$ ଏବଂ $\angle B$

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $m\angle ACD = m\angle A + m\angle B$

ପ୍ରମାଣ : ΔABC ରେ

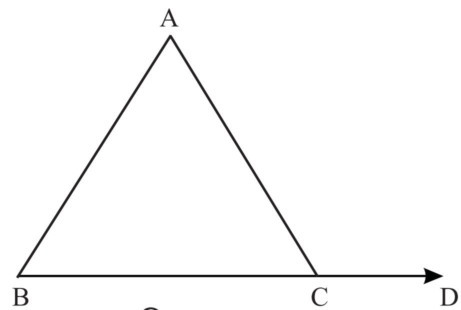
$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^0$ (ଉପପାଦ୍ୟ - 9)

କିନ୍ତୁ $m\angle C + m\angle ACD = 180^0$ (ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରକ)

$\therefore m\angle A + m\angle B + m\angle C = m\angle C + m\angle ACD$

$\Rightarrow m\angle A + m\angle B = m\angle ACD$

ଅର୍ଥାତ୍ $m\angle ACD = m\angle A + m\angle B$ (ପ୍ରମାଣିତ)



(ଚିତ୍ର 1.63)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : 1

ତ୍ରିଭୁଜର କୌଣସି ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ, ଏହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣ ପରିମାଣ ଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 10 ର ପ୍ରମାଣରେ ବହିଃସ୍ଥ $m\angle ACD = m\angle A + m\angle B$

ତେଣୁ $m\angle ACD$, $m\angle A$ ଓ $m\angle B$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଠାରୁ ବୃହତ୍ତର।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : 2

ତ୍ରିଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 360^0 ।

Δ ABC ର କୋଣିକ ବିନ୍ଦୁ A, B, C ଠାରେ ଯଥାକ୍ରମେ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}$ ଓ $\overrightarrow{CB}$ ର ବିପରୀତ ରଶ୍ମି ଅଙ୍କନ କରିବା ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣତ୍ରୟର ପରିମାଣ ସମଷ୍ଟି 360^0 ବୋଲି ପ୍ରମାଣ କରିପାରିବା ।

$m\angle ACD = m\angle A + m\angle B$,

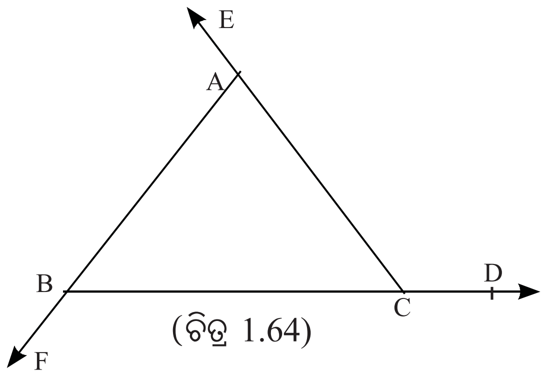
$m\angle BAE = m\angle B + m\angle C$ ଓ

$m\angle CBF = m\angle A + m\angle C$ ।

$\therefore m\angle ACD + m\angle BAE + m\angle CBF$

$= 2\ (m\angle A + m\angle B + m\angle C)$

$= 2 \times 180^0 = 360^0$ (ପ୍ରମାଣିତ)



(ଚିତ୍ର 1.64)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1(d)

(କ) ବିଭାଗ

1. ନିମ୍ନ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ ଭୁଲ୍ ଉକ୍ତି ପାଖରେ 'X' ଚିହ୍ନ ଏବଂ ଠିକ୍ ଉକ୍ତି ପାଖରେ '✓' ଚିହ୍ନ ଦିଅ ।

(a) କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି କୋଣର ପରିମାଣ ସମଷ୍ଟି ତୃତୀୟ କୋଣର ପରିମାଣ ସହ ସମାନ ହେଲେ ତ୍ରିଭୁଜଟି ସମକୋଣୀ । ☐

(b) କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି କୋଣର ପରିମାଣ ସମଷ୍ଟି ତୃତୀୟ କୋଣର ପରିମାଣ ଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜଟି ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣୀ । ☐

(c) ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ଏହାର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ କୋଣଦ୍ୱୟର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି ସହ ସମାନ । ☐

(d) ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜରେ ଅତିବେଶିରେ ଗୋଟିଏ ସ୍ଥୂଳକୋଣ ରହିପାରିବ । ☐

(e) ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିକୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି ସର୍ବଦା 180^0 । ☐

(f) ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରର ପରିପୂରକ । ☐

(g) ତ୍ରିଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥକୋଣ ସର୍ବଦା ଏକ ସ୍ଥୂଳକୋଣ । ☐

(h) ତ୍ରିଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥକୋଣର ପରିମାଣ ଏହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅନ୍ତସ୍ଥ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ କୋଣର ପରିମାଣ ଠାରୁ ବୃହତ୍ତର । ☐

2. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(a) ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକର ପରିମାଣ 30^0 ହେଲେ, ଅନ୍ୟଟିର ପରିମାଣ .... ।

(b) ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ ବହିଃସ୍ଥକୋଣର ପରିମାଣ 130^0 । ଏହାର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ କୋଣର ପରିମାଣ 75^0 ହେଲେ, ଅନ୍ୟ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ କୋଣର ପରିମାଣ ------- ।

(c) ΔABC ରେ $m\angle A = 55^0$ ଏବଂ $m\angle B = 75^0$ ହେଲେ $\angle C$ ର ପରିମାଣ ------- ।

(d) କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି ------- ।

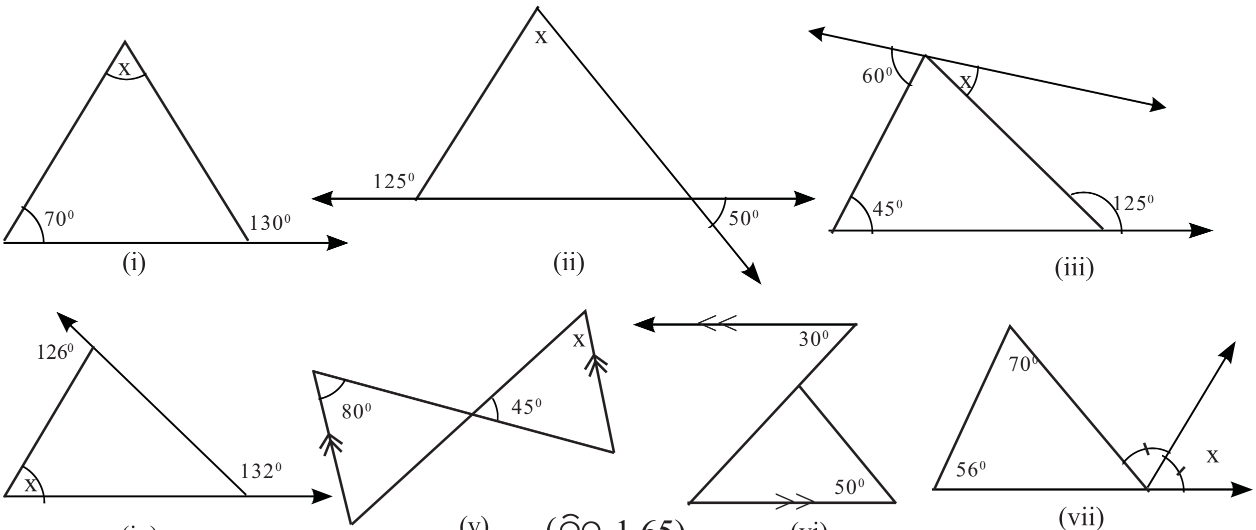
(e) ΔABC ରେ $m\angle A = 90^0$, $m\angle B = 2\, m\angle C$ ହେଲେ $\angle C$ ର ପରିମାଣ ------ ।

(f) ΔABC ରେ $AB = AC$, $m\angle A = 60^0$ ହେଲେ $m\angle B =$ -------

(g) ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷକୋଣର ପରିମାଣ 120^0 ଏବଂ ଅନ୍ୟ ଦୁଇକୋଣର ପରିମାଣ ସମାନ ହେଲେ, ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମାନକୋଣର ପରିମାଣ ------ ।

(h) ΔABC ରେ $AB = AC$, $m\angle B = 30^0$ ହେଲେ $\angle A$ ର ପରିମାଣ -------- ।

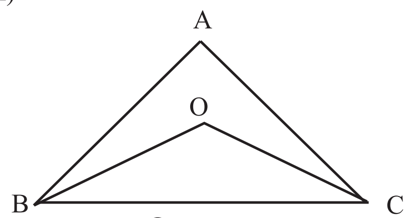
3. ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚିତ୍ରରେ 'x' ଚିହ୍ନିତ କୋଣର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।



(ଚିତ୍ର 1.65)

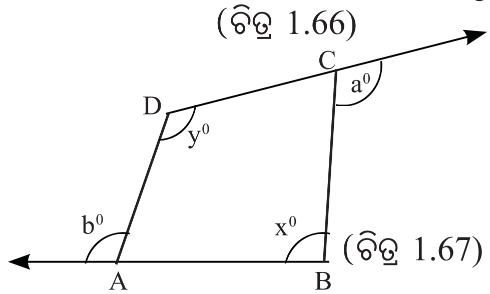
(ଖ) ବିଭାଗ

4. ΔABC ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ O । ଦର୍ଶାଅ ଯେ,
$m\angle BOC = m\angle BAC + m\angle ABO + m\angle ACO$



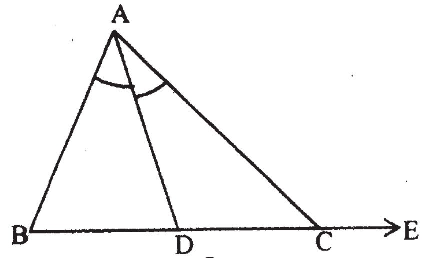
(ଚିତ୍ର 1.66)

5. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରୁ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $a^0 + b^0 = x^0 + y^0$ ।



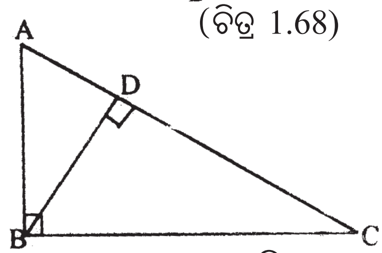
(ଚିତ୍ର 1.67)

6. Δ ABC ରେ $\angle A$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ କୁ
D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ ।
ଦର୍ଶାଅଯେ, $m\angle ABC + m\angle ACE = 2m\angle ADC$



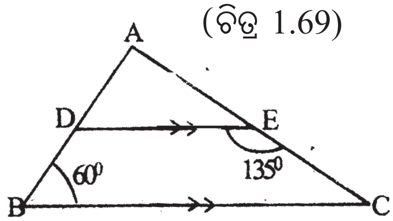
(ଚିତ୍ର 1.68)

7. Δ ABC ରେ $m\angle B = 90^0$ । $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,
$m\angle ABD = m\angle ACB$ ଏବଂ $m\angle BAD = m\angle DBC$ ।



(ଚିତ୍ର 1.69)

8. ΔABC ରେ $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, $m\angle ABC = 60^0$ ଏବଂ
$m\angle DEC = 135^0$ ହେଲେ, $\angle A$ ର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।



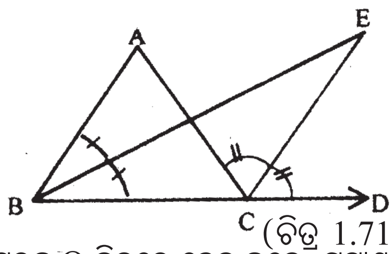
(ଚିତ୍ର 1.70)

(ଗ) ବିଭାଗ

9. ପ୍ରମାଣକର ଯେ, କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଯୋଡ଼ାକୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି, ତୃତୀୟକୋଣର ପରିମାଣ ଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜଟି ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣୀ ।

10. ΔABC ରେ $m\angle ABC = m\angle ACB$, $\angle BAC$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overline{BC}$ କୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ପ୍ରମାଣ କରଯେ, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।

11. ΔABC ରେ $\angle B$ ର ଅନ୍ତଃସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଏବଂ C ବିନ୍ଦୁରେ ଉତ୍ପନ୍ନ ବହିଃସ୍ଥକୋଣର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକର ଛେଦ ବିନ୍ଦୁ E ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $m\angle BEC = \frac{1}{2}\, m\angle A$ ।

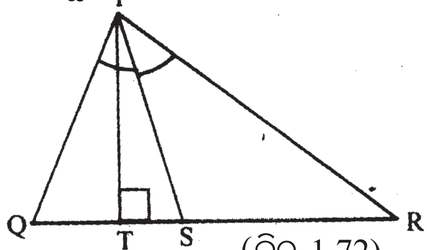


(ଚିତ୍ର 1.71)

12. ΔABC ରେ $\angle ABC$ ଓ $\angle ACB$ ର ଅନ୍ତଃସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $m\angle BOC = 90^0 + \frac{1}{2}\, m\angle A$ ।

13. ΔABC ରେ $\angle B$ ଓ $\angle C$ ର ବହିଃସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ, ପ୍ରମାଣ କରଯେ $m\angle BOC = 90^0 - \frac{1}{2}\, m\angle A$ ।

14. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ $\overline{PS}$, $\angle P$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଏବଂ $\overline{PT} \perp \overline{QR}$ ।
ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $m\angle TPS = \frac{1}{2}(m\angle Q - m\angle R)$



(ଚିତ୍ର 1.72)

15. ΔABC ରେ $\overline{BC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ Q ଏବଂ BQ = AQ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\angle BAC$ ସମକୋଣ ।

16. ΔABC ର O ଏକ ଅନ୍ତସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ । ଯଦି $m\angle OAB = m\angle OCA$ ହୁଏ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,
$m\angle AOC + m\angle BAC = 180^0$ ।

ତ୍ରିଭୁଜମାନଙ୍କ ସର୍ବସମତା

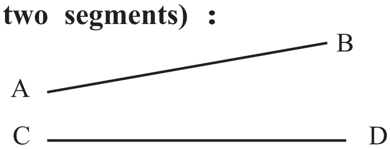
(CONGRUENCE OF TRIANGLE)

2.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ଦୁଇଟି ଏକ ପ୍ରକାର ଜ୍ୟାମିତିକ ଚିତ୍ର ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକର ଅବିକଳ ନକଲ (trace-copy) କୁ ନେଇ ଅନ୍ୟ ଉପରେ ପକାଇଲେ ଯଦି ସେହି ଚିତ୍ର ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ପୂର୍ଣ୍ଣମେଳନ ସଂପର୍କ ଅଛି ବୋଲି କୁହାଯାଏ । ଏପରି ସ୍ଥଳେ ଚିତ୍ରଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ (equal in all respects) ହୁଅନ୍ତି । ଏହି ସଂପର୍କକୁ '$\cong$' ସଂକେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ । ଏହି ମିଳିଯାଉଥିବା ଅଂଶ ଦ୍ୱୟକୁ ପରସ୍ପର ଅନୁରୂପ ଅଙ୍ଗ କୁହାଯାଏ । ସର୍ବସମ ଅଙ୍ଗଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରତ୍ୟେକର ଯଦି କୌଣସି ମାପ ଥାଏ ତେବେ ସେହି ମାପ ଦ୍ୱୟ 'ସମାନ' ହୁଅନ୍ତି ଏବଂ ଏହାକୁ ସମାନ ଚିହ୍ନ '=' ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

(1) ଦୁଇଟି ରେଖାଖଣ୍ଡର ସର୍ବସମତା (Congruence of two segments) :

ଦୁଇଟି ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ହେଲେ, ସେହି ରେଖାଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ଅଟନ୍ତି ।



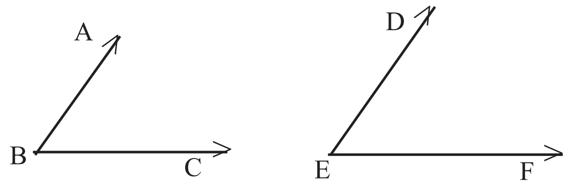
(ଚିତ୍ର 2.1)

ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଦୁଇଟି ରେଖାଖଣ୍ଡ ଯେପରିକି $AB = CD$ । ତେବେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ସର୍ବସମ ଅଟନ୍ତି । ସଂକେତରେ ଏହାକୁ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ରୂପେ ଲେଖାଯାଏ ।

(2) ଦୁଇଟି କୋଣର ସର୍ବସମତା

(Congruence of two angles) :

ଦୁଇଟି କୋଣର ପରିମାଣ ସମାନ ହେଲେ ସେହି କୋଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହୁଅନ୍ତି ।

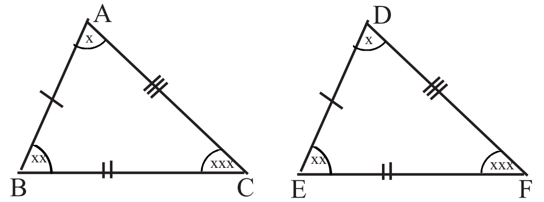


(ଚିତ୍ର 2.2)

ଅର୍ଥାତ୍ $\angle ABC$ ଓ $\angle DEF$ ଦୁଇଟି କୋଣ ଯେପରିକି $m\angle ABC = m\angle DEF$ । ତେବେ $\angle ABC$ ଓ $\angle DEF$ ସର୍ବସମ ଅଟନ୍ତି । ଏହାକୁ ସଂକେତରେ $\angle ABC \cong \angle DEF$ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ ।

2.2 ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜର ସର୍ବସମତା :

ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିଟି ବାହୁ ଓ ତିନିଟି କୋଣ ଅର୍ଥାତ୍ ଛଅଟି ମୌଳିକ ଅଂଶ ଅଛି। ତେଣୁ ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜର ସର୍ବସମତା ଏହି ଛଅଟି ଅଂଶର ସର୍ବସମତା ଉପରେ ନିର୍ଭରଶୀଳ। **ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ଗୋଟିକର ତିନିବାହୁ ଅନ୍ୟଟିର ତିନି ବାହୁ ସହିତ ସର୍ବସମ ହେଲେ ଏବଂ ସର୍ବସମ ବାହୁଗୁଡ଼ିକର ବିପରୀତ କୋଣ ମାନ ସର୍ବସମ ହେଲେ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟକୁ ସର୍ବସମ ତ୍ରିଭୁଜ କୁହାଯାଏ।**



(ଚିତ୍ର 2.3)

ପାଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ ΔABC ଓ ΔDEF ମଧ୍ୟରେ -

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{CA} \cong \overline{FD}$

ଏବଂ $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$

ତେଣୁ Δ ABC ଓ Δ DEF ସର୍ବସମ। ସଂକେତରେ ଏହି ସର୍ବସମତାକୁ $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ ରୂପେ ଲେଖାଯାଏ। ଅନୁରୂପ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁ ମାନଙ୍କର କ୍ରମ ରକ୍ଷା କରି ସର୍ବସମକୋଣକୁ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ।

ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ସର୍ବସମ ବାହୁ ଗୁଡ଼ିକର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣକୁ ଅନୁରୂପ କୋଣ ଓ ସର୍ବସମ କୋଣ ଗୁଡ଼ିକର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁକୁ ଅନୁରୂପ ବାହୁ କୁହାଯାଏ।

ଚିତ୍ର 2.3ରେ A,B,C ଯଥାକ୍ରମେ D, E, F ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ଅନୁରୂପ ଅଟନ୍ତି । $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ ବାହୁମାନଙ୍କର ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FD}$ ଅନୁରୂପ ବାହୁ ଏବଂ $\angle A$, $\angle B$ ଓ $\angle C$ ର ଯଥାକ୍ରମେ $\angle D$, $\angle E$ ଓ $\angle F$ ଅନୁରୂପ କୋଣ ଅଟନ୍ତି।

ଏଠାରେ ଉଲ୍ଲେଖ ଯୋଗ୍ୟ ଯେ ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ ସର୍ବସମ ହେଲେ ସେହି ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମାନ ହେବ; କିନ୍ତୁ, ଯଦି ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମାନ ହୋଇଥାଏ ତେବେ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ନ ହୋଇପାରନ୍ତି। କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଉପପାଦ୍ୟ ପଢ଼ିବା ପରେ ଏହା ବୁଝିପାରିବ ।

ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜର ସର୍ବସମତା ପାଇଁ ନ୍ୟୁନତମ ସର୍ତ୍ତ :

ପୂର୍ବୋକ୍ତ ଆଲୋଚନାରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜର ସର୍ବସମତାର ଅର୍ଥ ଗୋଟିକର ତିନିବାହୁ ଓ ତିନିକୋଣ ସହିତ ଯଥାକ୍ରମେ ଅନ୍ୟଟିର ଅନୁରୂପ ବାହୁ ଓ କୋଣ ଗୁଡ଼ିକର ସର୍ବସମତା । କିନ୍ତୁ ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନି ବାହୁ ଠାରୁ ତିନି କୋଣକୁ ପୃଥକ ଭାବେ ବିଚାର କରିବା ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ।ଗୋଟିଏ ତ୍ରଭୁଜର ତିନିବାହୁକୁ ଅନ୍ୟ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ ତିନିବାହୁ ସହିତ ମିଳାଇ ଦେଲେ ସଂପୃକ୍ତ କୋଣ ଗୁଡ଼ିକ ଆପେ ଆପେ ମିଳିଯାନ୍ତି। ତେଣୁ କେବଳ ତିନି ବାହୁକୁ ମିଳାଇ ମଧ୍ୟ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ବୋଲି କହିହେବ।

ଅନ୍ୟ ଏକ ପରିସ୍ଥିତିରେ ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି ବାହୁ ଓ ସେହି ବାହୁଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣକୁ ଅନ୍ୟ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଯଥାକ୍ରମେ ସର୍ବସମ ହୋଇଥିବା ଦୁଇବାହୁ ଏବଂ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ ସହିତ ମିଳାଇବା ବେଳେ ଦେଖିବା ଯେ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟର ତୃତୀୟ ବାହୁ ଦୁଇଟି ଆପେ ଆପେ ମିଳିଯାଆନ୍ତି। ଅର୍ଥାତ୍ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହୋଇଯାଆନ୍ତି। ପୂର୍ବରୁ ଗୃହୀତ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଗୁଡ଼ିକର ସହାୟତାରେ ଏହି ତଥ୍ୟକୁ ପ୍ରମାଣ କରିବା ସମ୍ଭବ ହେଉ ନଥିବାରୁ ଏହାକୁ ଏକ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ରୂପେ ଗ୍ରହଣ କରାଯାଇଛି। ତତ୍ ସହିତ ଏହି ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ସାହାଯ୍ୟରେ ସର୍ବସମତା ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ଉପପାଦ୍ୟ ଗୁଡ଼ିକୁ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇଛି।

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ -10 : ବା-କୋ-ବା (ବାହୁ-କୋଣ-ବାହୁ) ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ

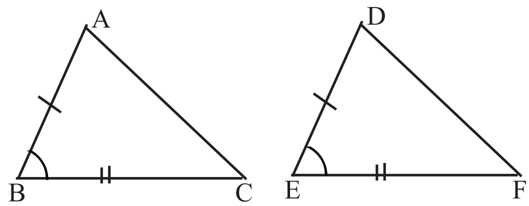
ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ଗୋଟିକର ଦୁଇବାହୁ ଓ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ ଯଥାକ୍ରମେ ଅନ୍ୟ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇବାହୁ ଓ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ ସହ ସମାନ ହେଲେ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ।

(If two sides and the included angle of a triangle are respectively congruent with two sides and the included angle of another triangle, then the triangles are congruent.)

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ : ΔABC ଓ ΔDEF ମଧ୍ୟରେ

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$

ଏବଂ $\angle B \cong \angle E$ ହେଲେ $\Delta ABC \cong \Delta DEF$



(ଚିତ୍ର 2.4)

ଏହାକୁ ବାହୁ-କୋଣ-ବାହୁ (ବା-କୋ-ବା) ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ (Side-Angle-Side or S-A-S axiom) କୁହାଯାଏ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 11

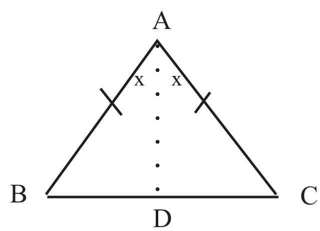
ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି ବାହୁ ସର୍ବସମ ହେଲେ ସେହି ବାହୁ ଦ୍ୱୟର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ।

(If two sides of a triangle are congruent then their opposite angles are also congruent.)

ଦତ୍ତ : ΔABC ରେ $AB = AC$

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $m\angle ABC = m\angle ACB$

ଅଙ୍କନ : $\angle BAC$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ, $\overline{BC}$ କୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ।



(ଚିତ୍ର 2.5)

ପ୍ରମାଣ : ΔABD ଓ ΔACD ମଧ୍ୟରେ

$\because$ { $AB = AC$ (ଦତ୍ତ)
$\overline{AD}$ ସାଧାରଣ ବାହୁ
$m\angle BAD = m\angle CAD$ (ଅଙ୍କନ) }

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ (ବା-କୋ-ବା ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ)

$\Rightarrow \angle ABD \cong \angle ACD \Rightarrow \angle ABC \cong \angle ACB$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ-1 : ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର କୋଣତ୍ରୟର ପରିମାଣ ସମାନ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ -2: ΔABC ରେ $AB = AC$ ହେଲେ $\angle A$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overline{BC}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ ହେବ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 12 (କୋ-ବା-କୋ ସର୍ବସମତା)

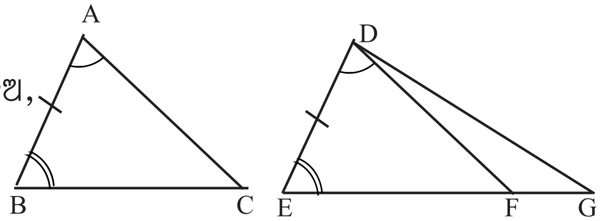
ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇକୋଣ ଓ ଅନ୍ତର୍ଗତ ବାହୁ ଯଥାକ୍ରମେ ଅନ୍ୟ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇକୋଣ ଓ ଅନ୍ତର୍ଗତ ବାହୁ ସହ ସର୍ବସମ ହେଲେ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ।

(If two angles and the included side of a triangle are respectively congruent to two angles and the included side of another, the triangles are congruent)

ଦତ୍ତ : ΔABC ଓ ΔDEF ମଧ୍ୟରେ $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ ଏବଂ $AB = DE$

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

ଅଙ୍କନ : $\overline{EF}$ ଉପରେ ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ G ନିଅ, ଯେପରିକି $BC = EG$ ହେବ । $\overline{DG}$ ଅଙ୍କନ କର।



(ଚିତ୍ର 2.6)

ପ୍ରମାଣ : ΔABC ଓ ΔDEG ମଧ୍ୟରେ

$\because$ $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ (ଦତ୍ତ)
$\overline{BC} \cong \overline{EG}$ (ଅଙ୍କନ)
$\angle B \cong \angle E$ (ଦତ୍ତ)

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEG$............. (1) (ବା-କୋ-ବା ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ)

$\Rightarrow \angle BAC \cong \angle EDG$ (ଅନୁରୂପ କୋଣ)

କିନ୍ତୁ $\angle BAC \cong \angle EDF$ (ଦତ୍ତ)

$\Rightarrow \angle EDG \cong \angle EDF$

$\Rightarrow G = F$ ଅର୍ଥାତ୍ G ଓ F ଅଭିନ୍ନ .... (2)

$\therefore$ (1) ଓ (2) $\Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta DEF$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ବି.ଦ୍ର.: ଅଙ୍କନରେ E-F-G ନ ହୋଇ E-G-F ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ ପୂର୍ବ ପରି ହେବ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ : ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ ΔABC ଓ ΔDEF ମଧ୍ୟରେ ଗୋଟିକର ଦୁଇ କୋଣ ଓ ଯେକୌଣସି ଗୋଟିଏ ବାହୁ ଯଥାକ୍ରମେ ଅନ୍ୟଟିର ଦୁଇକୋଣ ଓ ଅନୁରୂପ ବାହୁ ସହ ସର୍ବସମ ହେଲେ ନିମ୍ନ ତିନି ପ୍ରକାର ପରିସ୍ଥିତି ଉପୁଜିଥାଏ ।

(a) $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$

(b) $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

(a) $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$

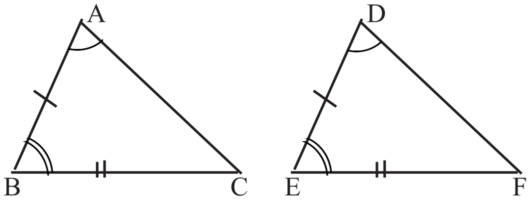
ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ପରିସ୍ଥିତି ଏହି ତିନି ପ୍ରକାର ହେବ ।

ପରିସ୍ଥିତି (a)ରେ ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟର ସର୍ବସମତାର ପ୍ରମାଣ ଉପପାଦ୍ୟ 12 ରେ ଦିଆଯାଇଛି । ପରିସ୍ଥିତି (b) ଓ (c) ଏକ ପ୍ରକାରର ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : (କୋ-କୋ-ବା ସର୍ବସମତା)

ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇକୋଣ ଓ ଯେ କୌଣସି ଗୋଟିଏ ବାହୁ ଯଥାକ୍ରମେ ଅନ୍ୟ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇ କୋଣ ଓ ଅନୁରୂପ ବାହୁ ସହ ସର୍ବସମ ହେଲେ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ।

(Two triangles are congruent if two angles and any side of one are respectively congruent to two angles and the corresponding side of the other.)



(ଚିତ୍ର 2.7)

ଦତ୍ତ : Δ ABC ଓ Δ DEF ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ

$\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ ଏବଂ $BC = EF$

ପ୍ରମାଣ୍ୟ : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

ପ୍ରମାଣ : $\because$ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନି କୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 180^0

$\therefore m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^0 = m\angle D + m\angle E + m\angle F$

କିନ୍ତୁ ଦତ୍ତାନୁଯାୟୀ $m\angle A = m\angle D$ ଓ $m\angle B = m\angle E$

$\therefore m\angle C = m\angle F$

ବର୍ତ୍ତମାନ Δ ABC ଓ Δ DEF ମଧ୍ୟରେ

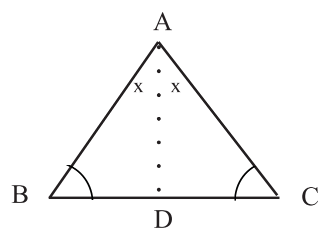
$\because$ {
$m\angle B = m\angle E$ (ଦତ୍ତ)
$m\angle C = m\angle F$ (ପ୍ରମାଣିତ)
$BC = EF$ (ଦତ୍ତ)
}

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$ (କୋ-ବା-କୋ ସର୍ବସମତା) (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉପପାଦ୍ୟ - 13

ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି କୋଣ ସର୍ବସମ ହେଲେ ସେମାନଙ୍କର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟ ସର୍ବସମ ।

(If two angles of a triangle are congruent, then their opposite sides are also congruent.)



(ଚିତ୍ର 2.8)

ଦତ୍ତ : Δ ABC ରେ $m\angle B = m\angle C$

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $AB = AC$

ଅଙ୍କନ : $\angle A$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overline{BC}$ କୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରୁ ।

ପ୍ରମାଣ : Δ ABD ଓ Δ ACD ମଧ୍ୟରେ

$\because$ {
$m\angle ABD = m\angle ACD$ (ଦତ୍ତ)
$m\angle BAD = m\angle CAD$ (ଅଙ୍କନ)
$\overline{AD}$ ସାଧାରଣ ବାହୁ

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ (କୋ-କୋ-ବା ସର୍ବସମତା)

$\Rightarrow AB = AC \Rightarrow AC = AB$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉପପାଦ୍ୟ - 14

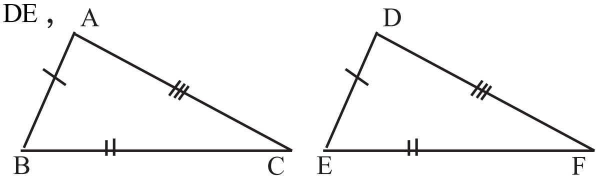
(ବା-ବା-ବା ସର୍ବସମତା)

ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିବାହୁ ଅନ୍ୟ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିବାହୁ ସହ ସର୍ବସମ ହେଲେ ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ।

If three sides of a triangle are congruent to those of another triangle the triangles are congruent.

ଦତ୍ତ : ΔABC ଓ ΔDEF ମଧ୍ୟରେ $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ ଓ $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$



(ଚିତ୍ର 2.9)

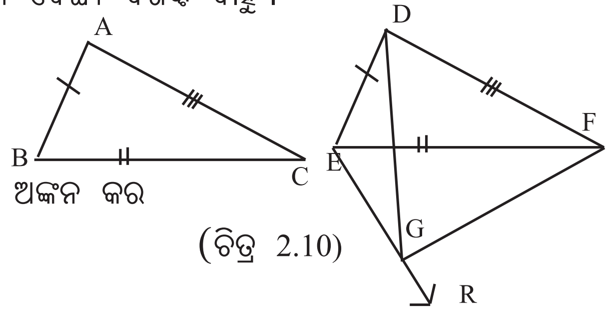
ଅଙ୍କନ : ମନେକର ΔABC ରେ $\overline{BC}$ ବୃହତ୍ତମ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ବାହୁ ।

$\overline{BC} \cong \overline{EF}$ (ଦତ୍ତ)

$\overline{EF}$ ର ଯେଉଁ ପାର୍ଶ୍ୱରେ D ଅଛି,

ତାହାର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ $\angle FER$ ଅଙ୍କନ କର

ଯେପରିକି, $m\angle CBA = m\angle FER$



(ଚିତ୍ର 2.10)

ଏବଂ $\overrightarrow{ER}$ ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ G ନିଅ ଯେପରିକି E-G-R ଓ AB = EG ହେବ । $\overline{DG}$ ଓ $\overline{GF}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : ΔABC ଓ ΔGEF ଦ୍ୱୟରେ $\overline{AB} \cong \overline{GE}$ (ଅଙ୍କନ)

$m\angle CBA = m\angle FEG$ (ଅଙ୍କନ) ଏବଂ $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ (ଦତ୍ତ)

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta GEF$ (ବା-କୋ-ବା ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ)

$\therefore m\angle EGF = m\angle BAC$ ଏବଂ $GF = AC$

$\Rightarrow GF = DF$ ($\because AC = DF$).......... (i)

ପୁନଶ୍ଚ $AB = GE \Rightarrow GE = DE$ ($\because AB = DE$) .... (ii)

(i) ରୁ ପାଇବା $m\angle FDG = m\angle FGD$ ...... (iii)

ଏବଂ (ii) ରୁ ପାଇବା $m\angle EDG = m\angle EGD$ .... (iv)

(iii) ଓ (iv) ⇒ m∠FDG + m∠EDG = m∠FGD + m∠EGD ⇒

m∠EDF = m∠EGF ⇒ m∠EGF = m∠EDF............. (v)

ବର୍ତ୍ତମାନ ΔGEF ଏବଂ ΔDEF ଦ୍ୱୟରେ

GF = DF .... (i) ରୁ
GE = DE .... (ii) ରୁ
ଏବଂ m∠EGF = m∠EDF ....(v) ରୁ

∴ Δ GEF ≅ ΔDEF (ବା-କୋ-ବା ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ)

କିନ୍ତୁ ପୂର୍ବରୁ ପ୍ରମାଣିତ Δ ABC ≅ ΔGEF ⇒ Δ ABC ≅ ΔDEF (ପ୍ରମାଣିତ)

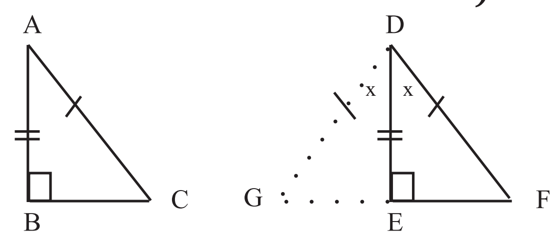
(ଉକ୍ତ ଉପପାଦ୍ୟର ପ୍ରମାଣ ଦୀର୍ଘ ଏବଂ କ୍ଲିଷ୍ଟ ହୋଇଥିବାରୁ ଏହାର ପ୍ରମାଣ ପରୀକ୍ଷା ବହିର୍ଭୁତ ଅଟେ; କେବଳ ଏହାର ପ୍ରୟୋଗ କରି ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନ କରାଯିବ ।)

ଉପପାଦ୍ୟ - 15

(ସ-କ-ବା ସର୍ବସମତା)

ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣ ଓ ଅନ୍ୟ ଏକ ବାହୁ ଯଥାକ୍ରମେ ଅନ୍ୟ ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣ ଓ ଏକ ବାହୁ ସହ ସର୍ବସମ ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ।

(Two right-angled triangles are congruent if the hypotenuse and one side of one triangle are respectively congruent to the hypotenuse and one side of the other.)



(ଚିତ୍ର 2.11)

ଦତ୍ତ : Δ ABC ଓ Δ DEF ମଧ୍ୟରେ

m∠B = m∠E = 90^0

$\overline{AC}$ କର୍ଣ୍ଣ ≅ $\overline{DF}$ କର୍ଣ୍ଣ ଏବଂ $\overline{AB}$ ≅ $\overline{DE}$

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : Δ ABC ≅ Δ DEF

ଅଙ୍କନ : $\overrightarrow{FE}$ ଉପରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁ G ନିଅ ଯେପରିକି G-E-F ଏବଂ BC = EG ହେବ।
$\overline{DG}$ ଅଙ୍କନ କର।

ପ୍ରମାଣ : m∠DEF + m∠DEG = 180^0 [∵ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରକ କୋଣ]

∵ m∠DEF = 90^0 ∴ m∠DEG = 90^0

Δ ABC ଓ Δ DEG ମଧ୍ୟରେ

∵ AB = DE (ଦତ୍ତ)
BC = EG (ଅଙ୍କନ)
m∠ABC = 90^0 = m∠DEG

$\therefore \Delta$ ABC $\cong \Delta$ DEG (ବା-କୋ-ବା ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ)

$\Rightarrow$ AC = DG ଓ m$\angle$ACB = m$\angle$DGE .... (i)

ପୁନଶ୍ଚ $\because$ AC = DG $\Rightarrow$ DG = DF

$\Rightarrow$ m$\angle$DGE = m$\angle$DFE .... (ii)

(i) ଓ (ii) $\Rightarrow$ m$\angle$ACB = m$\angle$DFE

$\therefore$ Δ ABC ଓ Δ DEF ମଧ୍ୟରେ

$\because$ { m$\angle$ACB = m$\angle$DFE (ପ୍ରମାଣିତ)
m$\angle$ABC = m$\angle$DEF (ଦତ୍ତ)
AC = DF (ଦତ୍ତ)

$\therefore \Delta$ ABC $\cong \Delta$ DEF (କୋ-କୋ-ବା ସର୍ବସମତା) (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 2 (a)

(କ) ବିଭାଗ

1. ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛି ଲେଖ।

(i) Δ ABC ଓ Δ PQR ସର୍ବସମ ହେବେ ଯଦି -

(a) AB = PQ, AC = QR, m$\angle$B = m$\angle$Q (b) AB = PQ, AC = QR, m$\angle$A = m$\angle$R

(c) AB = PQ, AC = PR, m$\angle$A = m$\angle$P (d) AB = PQ, AC = QR, m$\angle$A = m$\angle$Q

(ii) Δ ABC ଓ Δ DEF ସର୍ବସମ ହେବେ ଯଦି -

(a) m$\angle$A = m$\angle$D, m$\angle$B = m$\angle$F, AB = DF, (b) m$\angle$A = m$\angle$D, m$\angle$B = m$\angle$F, AB = DE

(c) m$\angle$A = m$\angle$D, m$\angle$B = m$\angle$F, BC=DE, (d) m$\angle$A = m$\angle$D, m$\angle$B = m$\angle$F, AC = DF

(iii) Δ ABC ଓ Δ DEF ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ତ୍ରିଭୁଜରେ m$\angle$A = m$\angle$D ଓ AB = DE ହେଲେ ନିମ୍ନସ୍ଥ କେଉଁ ସର୍ତ୍ତଟି ସତ୍ୟ ନୁହେଁ ?

(a) BC = EF (b) m$\angle$ACB = m$\angle$DFE

(c) AC = DF (d) m$\angle$ABC = m$\angle$DFE

(iv) Δ ABC ଓ Δ PQR ସର୍ବସମ ହେଲେ ନିମ୍ନସ୍ଥ କେଉଁ ଉକ୍ତିଟି ସତ୍ୟ ହେବ ?

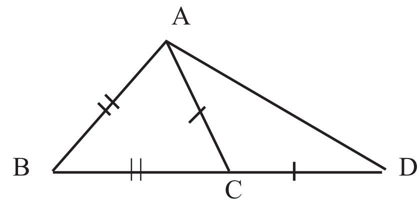
(a) AB = PQ, BC = QR, m$\angle$C = m$\angle$R (b) BC = PQ, CA = QR, m$\angle$A = m$\angle$P

(c) AB = PQ, m$\angle$A = m$\angle$Q, m$\angle$C = m$\angle$P (d) AB = PQ, m$\angle$A = m$\angle$P, m$\angle$B = m$\angle$Q

(v) ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର ଅନୁସାରେ $m\angle BAD : m\angle ADB$ ହେଉଛି -

(a) 2:1 (b) 3:1

(c) 1:2 (d) 1:3



(ଚିତ୍ର 2.12)

2. ନିମ୍ନସ୍ଥ କେଉଁ କେଉଁ ସର୍ତ୍ତରେ Δ ABC ଓ Δ PQR ସର୍ବସମ ହେବେ ?

(i) $AB = PQ$, $BC = QR$, $m\angle C = m\angle R$

(ii) $AB = PQ$, $m\angle A = m\angle P$, $m\angle B = m\angle Q$

(iii) $BC = PQ$, $CA = QR$, $m\angle A = m\angle P$

(iv) $m\angle P = m\angle B = 90^0$, $PQ = AB$, $PR = BC$

(v) $PQ = AB$, $PR = AC$, A ଓ P ବିନ୍ଦୁ ଠାରେ ଅଙ୍କିତ ବହିସ୍ଥ କୋଣ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ।

(vi) $AB = PQ$, $m\angle A = m\angle Q$, $m\angle C = m\angle R$

(ଖ) ବିଭାଗ

3. (i) ଗୋଟିଏ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷକୋଣର ପରିମାଣ 100^0 ହେଲେ ଏହା ପ୍ରତ୍ୟେକ ଭୂମି ସଂଲଗ୍ନ କୋଣର ପରିମାଣ କେତେ ?

(ii) ଗୋଟିଏ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଭୂମି ସଂଲଗ୍ନ କୋଣର ପରିମାଣ 45^0 ହେଲେ ଏହାର ଶୀର୍ଷକୋଣର ପରିମାଣ କେତେ ?

4. Δ ABCରେ $\overline{AC}$ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ $\overline{AB}$କୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଥିଲେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $AB = BD+DC$

5. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣର ପରିମାଣ 60^0।

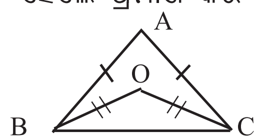
6. (i) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେଲେ ତ୍ରିଭୁଜଟି ସମଦ୍ୱିବାହୁ ।

(ii) Δ ABCରେ $AB = AC$ ହେଲେ, B ଓ C ବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ।

7. Δ ABCରେ $m\angle A = 72^0$ ଏବଂ $m\angle B = 2m\angle C$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, ତ୍ରିଭୁଜଟି ସମଦ୍ୱିବାହୁ।

8. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ $AB = AC$ ଏବଂ $BO = CO$

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\angle ABO \cong \angle ACO$ ।

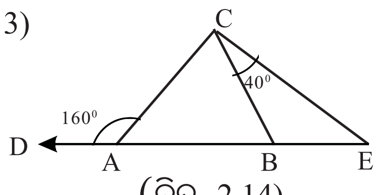


(ଚିତ୍ର 2.13)

9. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 2.14ରେ $AB = AC$

$m\angle CAD = 160^0$, $m\angle BCE = 40^0$

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $BE = BC$ ।



(ଚିତ୍ର 2.14)

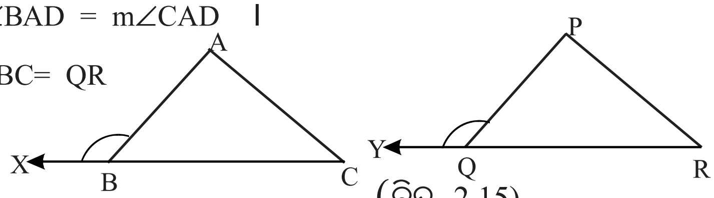
10. Δ ABC ରେ $AB = AC$ ଓ $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ।

ପ୍ରମାଣ କରଯେ $BD = DC$ ଓ $m\angle BAD = m\angle CAD$ ।

11. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 2.15ରେ $AB = PQ$, $BC = QR$

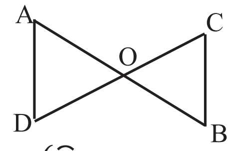
ଏବଂ $m\angle ABX = m\angle PQY$

ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ ।



(ଚିତ୍ର 2.15)

12. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ରେଖାଖଣ୍ଡଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରୁଥିଲେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ।

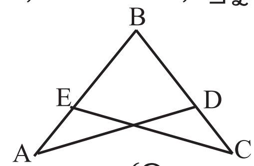


(ଚିତ୍ର 2.16)

13. ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $\overline{AC}$ କର୍ଣ୍ଣ ∠A କୁ ∠C ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରୁଥିଲେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ, AB = AD ଏବଂ CB = CD ।

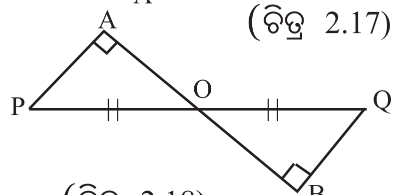
14. Δ ABC ରେ A ବିନ୍ଦୁରୁ $\overline{BC}$ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ $\overline{BC}$ କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରୁଥିଲେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ତ୍ରିଭୁଜଟି ସମଦ୍ୱିବାହୁ ।

15. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 2.17ରେ ଦତ୍ତ ଅଛି, m∠BAD = m∠BCE ଏବଂ AB = BC । ଦର୍ଶାଅ ଯେ, AD = CE ।



(ଚିତ୍ର 2.17)

16. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 2.18ରେ O, $\overline{PQ}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ । $\overline{PA}$ ଏବଂ $\overline{QB}$, $\overline{AB}$ ଉପରେ ଲମ୍ବ । ଦର୍ଶାଅ ଯେ AP = BQ ।



(ଚିତ୍ର 2.18)

(ଗ) ବିଭାଗ

17. Δ ABC ରେ AB = AC । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, B ଓ C ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଏହାର ବିପରୀତ ବାହୁମାନଙ୍କ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ।

18. Δ ABC ରେ AB = AC । ∠B ଓ ∠C ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଥିଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, BO = CO ଏବଂ $\overrightarrow{AO}$, ∠A ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ।

19. Δ ABC ରେ ∠B ସମକୋଣ । $\overline{AC}$ କର୍ଣ୍ଣର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ D ହେଲେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $BD = \frac{1}{2}AC$ ।

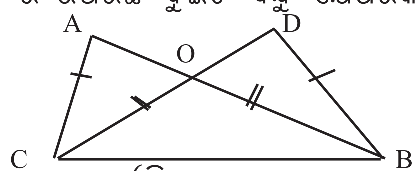
20. କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତାତ୍ରୟ ସମାନ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, ତ୍ରିଭୁଜଟି ସମବାହୁ ।

21. ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ କୋଣର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଏହାର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରୁଥିଲେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ତ୍ରିଭୁଜଟି ସମଦ୍ୱିବାହୁ ।

22. Δ ABC ଓ Δ DEF ରେ X ଓ Y ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{BC}$ ଓ $\overline{EF}$ ର ମଧ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ । AB = DF, BC = EF ଓ AX = DY ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, Δ ABC ≅ Δ DEF

23. Δ ABC ରେ AB = AC । X ଓ Y ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ର ଉପରିସ୍ଥ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ଯେପରିକି AX = AY ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, CX = BY ।

24. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 2.19 ରେ AB = CD ଓ AC = BD । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, AO = DO ଓ BO = CO ।



(ଚିତ୍ର 2.19)

25. Δ ABC ରେ AB= AC । ∠ABC ଓ ∠ACB କୋଣର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଥିଲେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ΔOBC ସମଦ୍ୱିବାହୁ ।

26. Δ ABC ରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ଉପରେ ଯଥାକ୍ରମେ D ଓ E ଏପରି ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ଯେପରିକି AD =AE ଏବଂ DB = EC । ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ।

2.3 ତ୍ରିଭୁଜରେ କିଛି ଅସମାନତା ସମ୍ବନ୍ଧ (Some Inequality Relations in a triangle):

ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁ ଓ କୋଣମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ 'ସର୍ବସମତା ସମ୍ବନ୍ଧ' ସଂକ୍ରାନ୍ତୀୟ ଉପପାଦ୍ୟ ଯଥା : ଯଦି ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇ ବାହୁ ସର୍ବସମ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ଏହାର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟ ସର୍ବସମ ଏବଂ ଏହାର ବିପରୀତ କଥନ ପୂର୍ବ ଅନୁଚ୍ଛେଦରେ ଆଲୋଚନା କରିସାରିଛେ । ଏହି ଅନୁଚ୍ଛେଦରେ ତ୍ରିଭୁଜର କିଛି କୋଣ ଓ ବାହୁ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଅସମାନତା ସଂପର୍କରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 16

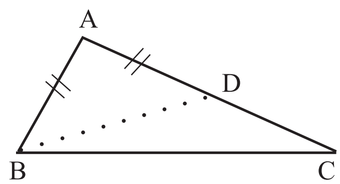
ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଏକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଏହାର ଅନ୍ୟ ଏକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ହେଲେ ବୃହତ୍ତର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ବାହୁର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣର ପରିମାଣ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ବାହୁର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣର ପରିମାଣ ଠାରୁ ବୃହତ୍ତର।

(If two sides of a triangle have unequal lengths, then the angle opposite the side with greater length has greater measure than that of the angle opposite the side with smaller length.)

ଦତ୍ତ : ΔABC ରେ $AC > AB$

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $m\angle ABC > m\angle ACB$

ଅଙ୍କନ : $\overline{AC}$ ଉପରେ D ଏକ ବିନ୍ଦୁ ନିଅ ଯେପରିକି A-D-C ଏବଂ $AD = AB$ । $\overline{BD}$ ଅଙ୍କନ କର।



(ଚିତ୍ର 2.20)

ପ୍ରମାଣ : ΔABD ରେ $AB = AD$ (ଅଙ୍କନ)

$\therefore \angle ABD \cong \angle ADB$ .... (1)

କିନ୍ତୁ ΔBDCରେ $\angle ADB$ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ଓ $\angle ACB$ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ କୋଣ।

$\therefore m\angle ADB > m\angle ACB$ .... (2)

$\therefore$ (1) ଓ (2) ଅନୁସାରେ $m\angle ABD > m\angle ACB$

କିନ୍ତୁ $m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle ABC$ [$\because$ D, $\angle ABC$ ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ] [$\because$ A ଓ D, $\overleftrightarrow{BC}$ ର ଏକପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏବଂ D ଓ C, $\overleftrightarrow{AB}$ ର ଏକପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ]

$\therefore m\angle ABC > m\angle ACB$ (ପ୍ରମାଣିତ)

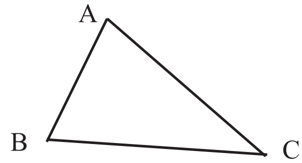
ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ବୃହତ୍ତମ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ବାହୁର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣ ବୃହତ୍ତମ ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 17

ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ ଅନ୍ୟ ଏକ କୋଣର ପରିମାଣ ଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ହେଲେ ବୃହତ୍ତର ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ କୋଣର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, କ୍ଷୁଦ୍ରତର ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ କୋଣର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଠାରୁ ବୃହତ୍ତର।

(If one angle of a triangle has greater measure than another, the side opposite to the greateer measure has greater length than the other.)

ଦତ୍ତ : Δ ABCରେ $m\angle ABC > m\angle ACB$



(ଚିତ୍ର 2.21)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : AC > AB

ପ୍ରମାଣ : AC ଓ AB ଦୁଇଟି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ହେତୁ -

AC = AB, AC < AB ଏବଂ AC > AB ମଧ୍ୟରୁ କେବଳ ଗୋଟିଏ ସମ୍ଭବ ।

ଯଦି AC = AB ହୁଏ, ତେବେ $m\angle ABC = m\angle ACB$ ହେବ । (ଉପପାଦ୍ୟ-11)

ଯଦି AC < AB ହୁଏ, ତେବେ $m\angle ABC < m\angle ACB$ ହେବ ।

କିନ୍ତୁ ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ $m\angle ABC > m\angle ACB$

$\therefore$ ଉପରୋକ୍ତ ଦୁଇଟି ପରିସ୍ଥିତି ଅସମ୍ଭବ ।

$\therefore$ AC > AB (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ବୃହତ୍ତମ ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ କୋଣର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁ ବୃହତ୍ତମ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ : ଦୁଇଟି ଉପପାଦ୍ୟ (ବା ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ) ମଧ୍ୟରେ ପ୍ରତ୍ୟେକର ସର୍ତ୍ତ ଅପରର ସିଦ୍ଧାନ୍ତ ସହ ସମାନ ହେଲେ ସେମାନଙ୍କୁ ପରସ୍ପର ବିପରୀତ ଉପପାଦ୍ୟ (ବା ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ) କୁହାଯାଏ ।

ଦୁଇଟି ପରସ୍ପର ବିପରୀତ କଥନମୂଳକ ଉପପାଦ୍ୟକୁ 'ଯଦି ଏବଂ କେବଳ ଯଦି' ଏହି ଖଣ୍ଡ ବାକ୍ୟର ପ୍ରୟୋଗ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରେ ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 18

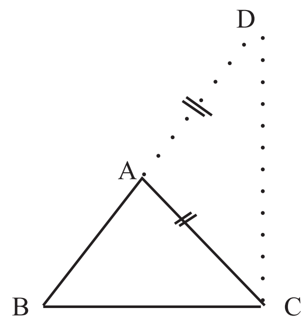
ତ୍ରିଭୁଜର ଯେ କୌଣସି ଦୁଇ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି ତୃତୀୟ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ।

(The sum of the lengths of any two sides of a triangle is greater than the length of the third side)

ଦତ୍ତ : ABC ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : (i) AB + AC > BC, (ii) AB + BC > AC ଏବଂ (iii) AC + BC > AB

ଅଙ୍କନ : $\overrightarrow{BA}$ ଉପରେ D ବିନ୍ଦୁ ନିଅ ଯେପରିକି B-A-D ଏବଂ AD =AC ହେବ । $\overline{CD}$ ଅଙ୍କନ କର ।



(ଚିତ୍ର 2.22)

ପ୍ରମାଣ : $\because$ B ଓ D ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଏକ ବିନ୍ଦୁ A ହୋଇଥିବାରୁ ଏହା $m\angle BCD$ ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ।

[$\because$ A ଓ D ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ $\overleftrightarrow{BC}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ଓ A ଓ B ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ $\overleftrightarrow{CD}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ]

$\therefore m\angle BCD = m\angle ACB + m\angle ACD \Rightarrow m\angle BCD > m\angle ACD$

ଅଙ୍କନାନୁଯାୟୀ AC = AD $\Rightarrow m\angle ADC = m\angle ACD$

$\Rightarrow$ m∠BCD > m∠ADC ଅର୍ଥାତ୍ m∠BCD > m∠BDC

$\Rightarrow$ BD > BC

$\Rightarrow$ AB + AD > BC $\Rightarrow$ AB + AC > BC .... (i) (ପ୍ରମାଣିତ)

ସେହିପରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରେ ଯେ

(ii) AB + BC > AC ଓ (iii) AC + BC > AB (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉପପାଦ୍ୟ - 19

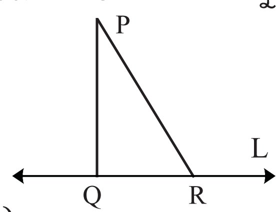
ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖାର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁକୁ ସରଳରେଖାଟିର ବିନ୍ଦୁ ମାନଙ୍କ ସହିତ ଯୋଗ କରି ଯେତେ ଗୁଡ଼ିଏ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରେ ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଲମ୍ବ ହେଉଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ।

(Of all segments drawn by joining the points of a line to an external point, the segment perpendicular to the line has the shortest length)

ଦତ୍ତ : L ସରଳରେଖାର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : P କୁ L ର ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ସହ ଯୋଗ କରି ଅଙ୍କିତ ରେଖାଖଣ୍ଡମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ L ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେଉଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ।

ଅଙ୍କନ : P ଠାରୁ L ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ପାଦବିନ୍ଦୁ Q ହେଉ ଓ L ଉପରେ R ଅନ୍ୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଉ । $\overline{PQ}$ ଓ $\overline{PR}$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ।



(ଚିତ୍ର 2.23)

ପ୍ରମାଣ : Δ PQR ରେ m∠PQR = 90^0 [$\because$ $\overline{PQ}$ $\perp$ L].

$\therefore$ m∠PRQ < 90^0 ଅର୍ଥାତ୍ ∠PRQ ଏକ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ

$\Rightarrow$ m∠PRQ < m∠PQR $\Rightarrow$ PQ < PR (ଉପପାଦ୍ୟ-17 ଦ୍ୱାରା)

$\therefore$ ଦତ୍ତ ରେଖାଖଣ୍ଡ ପ୍ରତି ଏହାର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ ହେଉଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ । (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 2(b)

(କ) ବିଭାଗ

1. ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକରଉତ୍ତର ଦିଅ ।

(a) Δ ABC ରେ m∠A = 40^0, m∠B = 75^0 ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜର ବୃହତ୍ତମ ଏବଂ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ବାହୁମାନ ସ୍ଥିର କର ।

(b) Δ ABC ରେ m∠A = 110^0, m∠B = 20^0 ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜର କେଉଁ ବାହୁଟି କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ?

(c) Δ ABC ରେ m∠B = 90^0 ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜର କେଉଁ ବାହୁଟି ବୃହତ୍ତମ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ?

(d) Δ ABC ରେ m∠A = m∠B +m∠C ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜର ବୃହତ୍ତମ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ବାହୁ କେଉଁଟି?

(e) Δ ABC ରେ m∠A = 40^0 m∠B = 50^0 । ବାହୁଗୁଡ଼ିକର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଉର୍ଦ୍ଧ୍ୱକ୍ରମରେ ସଜାଇ ଲେଖ ।

2. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(a) ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି, ଏହାର ତୃତୀୟ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟଠାରୁ ....।

(b) ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନ୍ତର, ଏହାର ତୃତୀୟ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟଠାରୁ .... ।

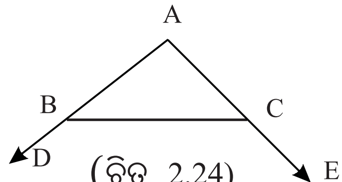
(c) ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତା ତ୍ରୟର ସମଷ୍ଟି, ଏହାର ପରିସୀମାଠାରୁ......... ।

(d) ତ୍ରିଭୁଜର ପରିସୀମା, ଏହାର ମଧ୍ୟମାତ୍ରୟର ସମଷ୍ଟିଠାରୁ .... ।

(e) ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁରୁ ଭୂମି ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ଏହାର ଅନ୍ୟ ଦୁଇ ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟଠାରୁ ...... ।

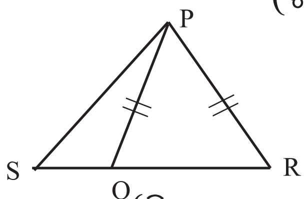
(ଖ) ବିଭାଗ

3. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ $m\angle CBD > m\angle BCE$ ହେଲେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $AB > AC$



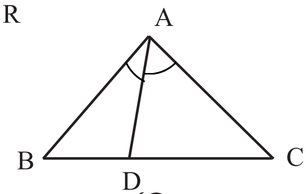
(ଚିତ୍ର 2.24)

4. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ $PQ = PR$ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $PS > PQ$



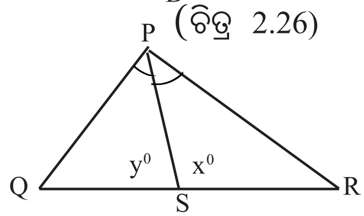
(ଚିତ୍ର 2.25)

5. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ $\overline{AD}$, $\angle A$ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ହେଲେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, (i) $AB > BD$ (ii) $AC > CD$



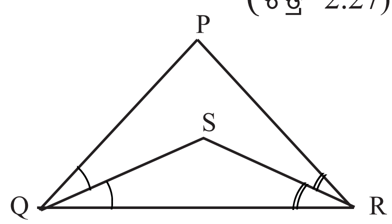
(ଚିତ୍ର 2.26)

6. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ $PR > PQ$ ଏବଂ PS, $\angle P$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ । ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $x > y$



(ଚିତ୍ର 2.27)

7. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ $PQ > PR$, $\overrightarrow{QS}$ ଏବଂ $\overrightarrow{RS}$ ଯଥାକ୍ରମେ $\angle Q$ ଓ $\angle R$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ । ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $SQ > SR$



(ଚିତ୍ର 2.28)

8. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣ ତ୍ରିଭୁଜର ବୃହତ୍ତମ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ବାହୁ ।

ଗ - ବିଭାଗ

9. PQRS ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $\overline{PS}$ ଓ $\overline{QR}$ ଯଥାକ୍ରମେ ଚତୁର୍ଭୁଜର ବୃହତ୍ତମ ଏବଂ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ବାହୁ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, (i) $m\angle PQR > m\angle PSR$ (ii) $m\angle QRS > m\angle SPQ$ ଏବଂ

(iii) $m\angle P + m\angle S < m\angle Q + m\angle R$

10. Δ ABCର AD, BE ଏବଂ CF ଉଚ୍ଚତା ତ୍ରୟ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

(i) $AB + AC > 2AD$ (ii) $AB + BC + AC > AD + BE + CF$

11. Δ ABCର $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ ଏବଂ $\overline{CF}$ ମଧ୍ୟମାତ୍ରୟ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

(i) $AB + AC > 2AD$ (ii) $AB + AC + BC > AD + BE + CF$

12. Δ ABCର O ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

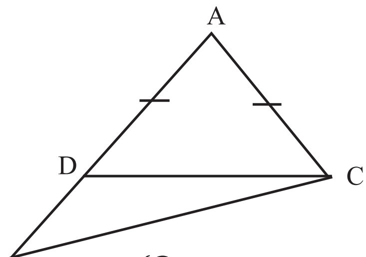
(i) $BO + CO < AB + AC$ (ii) $AO + BO + CO < AB + AC + BC$ ଏବଂ

(iii) $AO + BO + CO > \frac{1}{2}(AB+AC+BC)$

13. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ Δ ABCର $AB > AC$ ଏବଂ $AD = AC$

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, (i) $m\angle ACD = \frac{1}{2}(m\angle B + m\angle C)$

(ii) $m\angle BCD = \frac{1}{2}(m\angle C - m\angle B)$



(ଚିତ୍ର 2.29)

14. ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜରେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

(i) $AB + BC + CD > AD$ (ii) $AB + BC + CD + AD > AC + BD$

(iii) $AB + BC + CD + AD > 2AC$

15. Δ ABCରେ $AC > AB$ ଏବଂ $\overline{AD}$ ତ୍ରିଭୁଜର ମଧ୍ୟମା ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

$m\angle BAD > m\angle CAD$

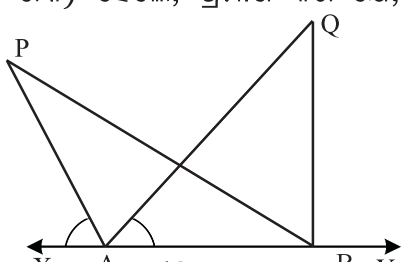
16. ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର O ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ (କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ ଭିନ୍ନ) ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

(i) $2(OA + OB + OC + OD) > AB + BC + CD + AD$

(ii) $OA + OB + OC + OD > AC + BD$

17. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ $m\angle PAX = m\angle QAY$ ହେଲେ

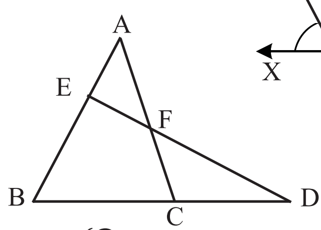
ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $PA + AQ < PB + BQ$



(ଚିତ୍ର 2.30)

18. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ $AB = AC$ ହେଲେ

ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $AF > AE$



(ଚିତ୍ର 2.31)

ତୃତୀୟ ଅଧ୍ୟାୟ

ଚତୁର୍ଭୁଜ

(QUADRILATERAL)

3.1. ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ତୁମେ ଚତୁର୍ଭୁଜ ସହ ପରିଚିତ ହେବା ସହ କେତେକ ବିଶେଷ ଧରଣରେ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଯଥା, ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର, ରମ୍ବସ, ଆୟତଚିତ୍ର ଓ ବର୍ଗଚିତ୍ର ସହ ମଧ୍ୟ ପରିଚିତ ହୋଇଛ । ଉପରୋକ୍ତ ବିଶେଷ ଧରଣର ଚିତ୍ର ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଧର୍ମ ଗୁଡ଼ିକର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା ମୂଳକ ପ୍ରମାଣ ମାଧ୍ୟମରେ କରାଯାଇଥିଲା ।

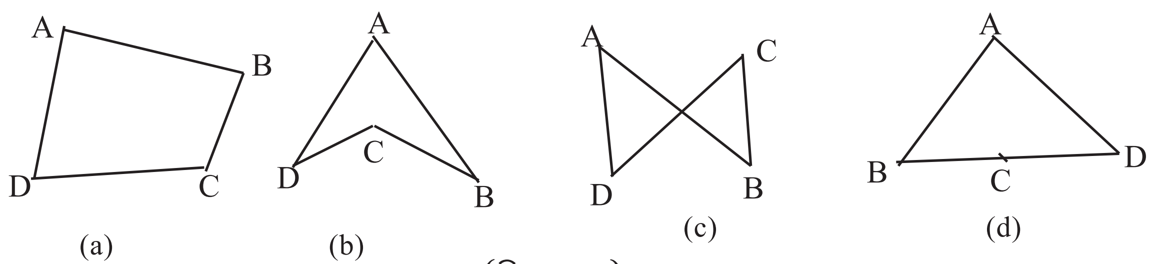
ସେହି ଧର୍ମ ଗୁଡ଼ିକର ଯୁକ୍ତି ମୂଳକ ପ୍ରମାଣ କରିବା ଏହି ଅଧ୍ୟାୟର ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ । ଏଥି ସହ ବହୁଭୁଜ (polygon) ସମ୍ବନ୍ଧରେ କିଛି ଆଲୋଚନା ମଧ୍ୟ ଏହି ଅଧ୍ୟାୟର ଅନ୍ୟ ଏକ ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ ।

3.2 ଚତୁର୍ଭୁଜ ଓ ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜ (Quadrilateral and convex quadrilateral) :

ସଂଜ୍ଞା : ମନେକର ସମତଳ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ଚାରୋଟି ବିନ୍ଦୁ A,B,C ଓ D ମଧ୍ୟରୁ

(i) ଯେକୌଣସି ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ନୁହନ୍ତି ;

(ii) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ ଓ $\overline{DA}$ ରେଖାଖଣ୍ଡ ସେମାନଙ୍କ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ ନ ଥିଲେ; ଏହି ଚାରିଗୋଟି ରେଖାଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ ସେଟ୍ $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$କୁ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ କୁହାଯାଏ ।



(ଚିତ୍ର 3.1)

ଚିତ୍ର 3.1(a) ଓ (b) ପ୍ରତ୍ୟେକରେ ABCD ଗୋଟିଏ ଲେଖାଏଁ ଚତୁର୍ଭୁଜ । ଚିତ୍ର 3.1(c)ରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ପରସ୍ପରକୁ ସେମାନଙ୍କ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଥିବାରୁ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ

ନୁହେଁ । ଚିତ୍ର 4.1(d)ରେ B, C, D ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ହୋଇଥିବାରୁ ABCD କୁ ଚତୁର୍ଭୁଜ କୁହାଯିବ ନାହିଁ ।

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ ଓ $\overline{DA}$ କୁ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର ବାହୁ (side) ଏବଂ ∠BAD, ∠ABC, ∠BCD, ∠CDA କୁ ଏହାର କୋଣ (Angle) କୁହାଯାଏ । A, B, C, D କୁ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ (Vertex) କୁହାଯାଏ ।

ଚତୁର୍ଭୁଜର ଯେଉଁ ଦୁଇଟି ବାହୁର ଏକ ସାଧାରଣ ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଥାଏ ସେ ଦ୍ୱୟକୁ **ସନ୍ନିହିତ (adjacent) ବାହୁ** ବା କୌଣସି ସାଧାରଣ ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ନଥିବା ବାହୁଦ୍ୱୟକୁ **ବିପରୀତ (Opposite) ବାହୁ** କୁହାଯାଏ । ଚତୁର୍ଭୁଜର ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୁଇଟି ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁକୁ **କ୍ରମିକ ଶୀର୍ଷ** ଓ କ୍ରମିକ ଶୀର୍ଷରେ ଥିବା କୋଣଦ୍ୱୟକୁ **କ୍ରମିକ କୋଣ** କୁହାଯାଏ । ଯେଉଁ ଶୀର୍ଷଦ୍ୱୟ କ୍ରମିକ ଶୀର୍ଷ ନୁହନ୍ତି ସେଦ୍ୱୟକୁ **ବିପରୀତ ଶୀର୍ଷ** କୁହାଯାଏ । ବିପରୀତ ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁରେ ଥିବା କୋଣଦ୍ୱୟକୁ **ବିପରୀତ କୋଣ** କୁହାଯାଏ ।

ଚିତ୍ର 3.1(a)ରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{BC}$ ସନ୍ନିହିତ ବାହୁ ଏବଂ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ବିପରୀତ ବାହୁ ; ∠A , ∠B କ୍ରମିକ କୋଣ ଓ ∠A, ∠C ବିପରୀତ କୋଣ; A ଓ B କ୍ରମିକ ଶୀର୍ଷ ଏବଂ A ଓ C ବିପରୀତ ଶୀର୍ଷ ।

ବିପରୀତ ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡଦ୍ୱୟକୁ ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣ (diagonal) କୁହାଯାଏ ।

ଚିତ୍ର 3.1 (a) ରେ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$, ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର ଦୁଇ କର୍ଣ୍ଣ ।

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଯେ, ଚତୁର୍ଭୁଜର ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଏକ କ୍ରମାନ୍ୱୟତା (Order) ରହିଛି । କ୍ରମାନ୍ୱୟତାର ପରିବର୍ତ୍ତନ ନକରି ABCD ପରିବର୍ତ୍ତେ BCDA ବା CDAB ବା DABC ଚତୁର୍ଭୁଜ ଲେଖାଯାଇପାରେ । କ୍ରମାନ୍ୱୟତାରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ କଲେ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଗଠିତ ହୋଇ ପାରେ ନାହିଁ ।

ଚିତ୍ର 3.1(a)ରେ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରୁଛନ୍ତି, କିନ୍ତୁ ଚିତ୍ର 3.1(b) ରେ ଛେଦ କରୁନାହାନ୍ତି । ବିଶେଷ ପ୍ରକାରର ଚତୁର୍ଭୁଜ ଗୁଡ଼ିକର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସବୁବେଳେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ଏହି ପ୍ରକାର ଚତୁର୍ଭୁଜର ସଂଜ୍ଞା ନିମ୍ନରେ ଦିଆଗଲା ।

ସଂଜ୍ଞା : ଯଦି ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଯେ କୌଣସି ବାହୁ ଏହାର ବିପରୀତ ବାହୁଦ୍ୱାରା ନିର୍ଣ୍ଣିତ ସରଳରେଖାକୁ ଛେଦ ନକରେ, ତାହେଲେ ଏହାକୁ ଏକ ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜ (Convex Quadrilateral) କୁହାଯାଏ ।

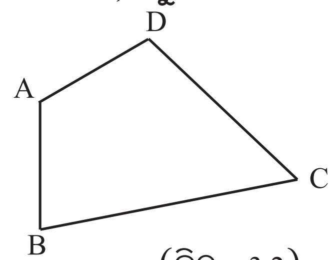
ଅର୍ଥାତ୍ ABCD ଏକ ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜ ହେଲେ,

(i) A ଓ B ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ $\overleftrightarrow{CD}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ

(ii) B ଓ C ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ $\overleftrightarrow{DA}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ

(iii) C ଓ D ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ $\overleftrightarrow{AB}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଏବଂ

(iv) D ଓ A ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ $\overleftrightarrow{BC}$ ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ ।



(ଚିତ୍ର 3.2)

ଚିତ୍ର 3.1 (a) ରେ ABCD ଏକ ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜ ମାତ୍ର ଚିତ୍ର 3.1 (b) ରେ ଥିବା ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଉତ୍ତଳ ଚର୍ତୁଭୁଜ ନୁହେଁ । କାରଣ, ଏଥିରେ $\overleftrightarrow{BC}$, $\overline{AD}$ ବାହୁକୁ ଛେଦ କରିବ ।

3.3 : ବହୁଭୁଜ (Polygon) :

ସଂଜ୍ଞା : ମନେକର P_1, P_2 ..... P_n ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ କେତେକ ବିନ୍ଦୁ ($n \geq 3$) ଏବଂ ଏମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସି ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଏକ ରେଖୀୟ ନୁହନ୍ତି । $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$ .... $\overline{P_{n-1}P_n}$, $\overline{P_nP_1}$ ସେମାନଙ୍କ ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁନଥିଲେ ଏହି n ସଂଖ୍ୟକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ ସେଟ୍ $\overline{P_1P_2} \cup \overline{P_2P_3} \cup .... \cup \overline{P_{n-1}P_n} \cup \overline{P_nP_1}$ କୁ P_1 P_2 ..... P_n ବହୁଭୁଜ କୁହାଯାଏ ।

$\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$ .... $\overline{P_nP_1}$ ବହୁଭୁଜର ବାହୁ ଏବଂ P_1, P_2 ..... P_n ବହୁଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ଅଟନ୍ତି । n ସଂଖ୍ୟକ ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବହୁଭୁଜରେ n ସଂଖ୍ୟକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣ ଥାଏ ।

ଉତ୍ତଳ ବହୁଭୁଜ (Convex Polygon) :

P_1 P_2 P_3 ..... P_n ବହୁଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁ ଦ୍ୱାରା ନିର୍ଣ୍ଣିତ ରେଖାର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଯଦି ବହୁଭୁଜର ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ଶୀର୍ଷ ଅବସ୍ଥାନ କରନ୍ତି ତେବେ ବହୁଭୁଜଟିକୁ **ଉତ୍ତଳ ବହୁଭୁଜ (Convex Polygon)** କୁହାଯାଏ ।

ସୁଷମ ବହୁଭୁଜ (Regular Polygon) :

ଯେଉଁ ବହୁଭୁଜର ସମସ୍ତ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ଏବଂ ସମସ୍ତ କୋଣର ପରିମାଣ ସମାନ, ସେପରି ବହୁଭୁଜକୁ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜ କୁହାଯାଏ ।

ବହୁଭୁଜର ବାହୁ ସଂଖ୍ୟା ଉପରେ ବହୁଭୁଜର ନାମକରଣ ନିର୍ଭର କରେ ।

ବହୁଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ସର୍ବାଧିକ ମୌଳିକ ହେଉଛି ତ୍ରିଭୁଜ ଯାହାର ବାହୁ ସଂଖ୍ୟା 3.

ବାହୁସଂଖ୍ୟା	ବହୁଭୁଜର ନାମ
3	ତ୍ରିଭୁଜ (Triangle)
4	ଚତୁର୍ଭୁଜ (Quadrilateral)
5	ପଞ୍ଚଭୁଜ (Pentagon)
6	ଷଡ଼ଭୁଜ (Hexagon)

ସେହିପରି ବାହୁ ସଂଖ୍ୟା 7, 8, 9 ଏବଂ 10 ପାଇଁ ବହୁଭୁଜକୁ ଯଥାକ୍ରମେ Heptagon (ସପ୍ତଭୁଜ), Octagon (ଅଷ୍ଟଭୁଜ), nonagon (ନଅଭୁଜ) ଓ Decagon (ଦଶଭୁଜ) କୁହାଯାଏ । ଆମେ ସାଧାରଣତଃ ଚତୁର୍ଭୁଜ, ପଞ୍ଚଭୂଜ, ଷଡ଼ଭୂଜ.... ଇତ୍ୟାଦିକୁ ନେଇ ବହୁଭୁଜ ସମ୍ପର୍କରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁଗୁଡ଼ିକର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ପରସ୍ପର ସମାନ $\Leftrightarrow$ କୋଣଗୁଡ଼ିକର ପରିମାଣ ସମାନ; କିନ୍ତୁ ବହୁଭୁଜ ସ୍ଥଳରେ ନୁହେଁ । ତେଣୁ ତ୍ରିଭୁଜ, ବହୁଭୁଜ ପରିବାରର ଏକ ସଦସ୍ୟ ନୁହେଁ । ଏ ସବୁ ସତ୍ତ୍ୱେ 'ତିନି'କୁ 'ବହୁ' ଭାବରେ ଗ୍ରହଣ କରାଯାଇଥିବାରୁ ଏବଂ ବହୁଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ ଏବଂ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣର ସୂତ୍ର ସମୂହ ତ୍ରିଭୁଜ ପାଇଁ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ହୋଇଥିବାରୁ, ତ୍ରିଭୁଜକୁ ବେଳେ ବେଳେ ବହୁଭୁଜ ପରିବାରରେ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ କରାଯାଏ ।

3.4 (A) ବହୁଭୁଜର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣ ମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି (Sum of the measures of the interior angles of a polygon) :

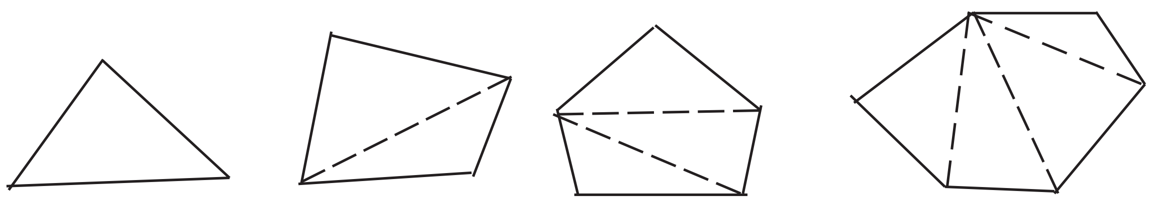
ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି = 180^0

ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଦୁଇଗୋଟି ତ୍ରିଭୁଜରେ ପରିଣତ କରାଯାଇପାରିବ ।

ତେଣୁ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି = $2 \times 180^0 = (4-2) \times 180^0$

ପଞ୍ଚଭୁଜଟି ତିନିଗୋଟି ତ୍ରିଭୁଜରେ ପରିଣତ ହୁଏ ତେଣୁ ଏହାର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି

$= 3 \times 180^0 = (5-2) \times 180^0$



ତ୍ରିଭୁଜ ଚର୍ତୁଭୁଜ ପଞ୍ଚଭୁଜ ଷଡ଼ଭୁଜ

(ଚିତ୍ର 3.3)

ସେହିପରି ଷଡ଼ଭୁଜକ୍ଷେତ୍ର କ୍ଷେତ୍ରରେ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣ ମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି= $4 \times 180^0 = (6-2) \times 180^0$

n- ଭୁଜକୁ $(n \geq 3)$ $(n - 2)$ ସଂଖ୍ୟକ ତ୍ରିଭୁଜରେ ପରିଣତ କରିହେବ ।

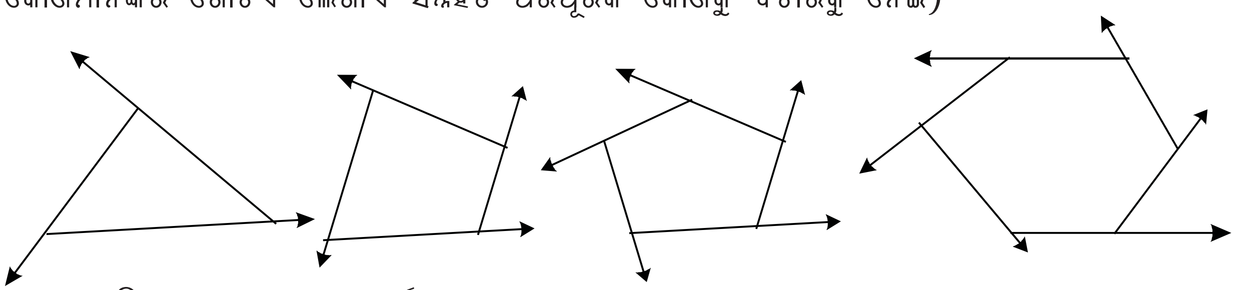
ତେଣୁ ଏହାର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ସମଷ୍ଟି $= (n-2) \times 180^0 = (n-2) \times 2$ ସମକୋଣ

$= (2n-4)$ ସମକୋଣ

n ସଂଖ୍ୟକ ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ $(n \geq 3)$ ବହୁଭୁଜର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି (2n–4) ସମକୋଣ ।

(B) ବହୁଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି (Sum of the measures of the exterior angles of a polygon) :

ବହୁଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଶୀର୍ଷ (Vertex) ରେ ଗୋଟିଏ ଲେଖାଏଁ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ସୃଷ୍ଟି ହୁଏ । (ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣମାନଙ୍କର ଗୋଟିଏ ଲେଖାଏଁ ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରକ କୋଣକୁ ବିଚାରକୁ ନେଇ)



ତ୍ରିଭୁଜ ଚର୍ତୁଭୁଜ ପଞ୍ଚଭୁଜ ଷଡ଼ଭୁଜ

(ଚିତ୍ର 3.4)

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ପ୍ରତ୍ୟେକ n ଭୂଜ ($n \geq 3$) ବିଶିଷ୍ଟ ବହୁଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ସଂଖ୍ୟା n (ଚିତ୍ର 3.4 କୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କର)

ପ୍ରତ୍ୟେକ ଶୀର୍ଷରେ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ + ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ $= 180^0 = 2$ ସମକୋଣ

ଗୋଟିଏ n ଭୁଜ ବିଶିଷ୍ଟ ବହୁଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି

$= n \times 2$ ସମକୋଣ – n ସଂଖ୍ୟକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି

$= n \times 2$ ସମକୋଣ – $(2n - 4)$ ସମକୋଣ

$= 4$ ସମକୋଣ $= 360^0$

ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟକର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି ବହୁଭୁଜର ବାହୁସଂଖ୍ୟାର ନିରପେକ୍ଷ (indepedent of the sides of the polygon) ଅଟେ ।

ମନେରଖ : ପ୍ରତ୍ୟେକ ବହୁଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ସମଷ୍ଟି 360^0

ଉପରୋକ୍ତ ଆଲୋଚନା ପରିପ୍ରେକ୍ଷୀରେ ଆମେ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ଏବଂ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କରିପାରିବା ।

ତୁମେମାନେ ଜାଣିଛ ଯେଉଁ ବହୁଭୁଜର ସମସ୍ତ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ପରସ୍ପର ସମାନ ହେବା ସଂଗେ ସଂଗେ ସମସ୍ତ କୋଣର ପରିମାଣ ମଧ୍ୟ ପରସ୍ପର ସମାନ ତାହାକୁ **ସମବହୁଭୁଜ ବା ସୁଷମ ବହୁଭୁଜ (Regular Polygon)** କୁହାଯାଏ ।

ଏଣୁ n ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ $= \left(\frac{2n-4}{n}\right)$ ସମକୋଣ

ଏବଂ n ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବହିସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ $= \frac{360^0}{n}$

ମନେରଖ : n ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ $= \frac{2n-4}{n}$ ସମକୋଣ

ଏବଂ ଏକ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ $= \frac{360^0}{n}$

ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ସାରଣୀରେ କେତେଗୋଟି ବହୁଭୁଜମାନଙ୍କ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଓ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣମାନଙ୍କ ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି ଓ ବହୁଭୁଜଟି ସୁଷମ ହୋଇଥିଲେ ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣମାନଙ୍କ ପରିମାଣ ଦିଆଯାଇଛି ।

ବହୁଭୁଜ	ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣମାନଙ୍କ ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି	ବହିଃସ୍ଥ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି	ବହୁଭୁଜ ସୁଷମ ହୋଇଥିଲେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ
ତ୍ରିଭୁଜ	2 ସମକୋଣ	4 ସମକୋଣ	60^0
ଚର୍ତୁଭୁଜ	4 ସମକୋଣ	4 ସମକୋଣ	90^0
ପଞ୍ଚଭୁଜ	6 ସମକୋଣ	4 ସମକୋଣ	108^0
ଷଡ଼ଭୁଜ	8 ସମକୋଣ	4 ସମକୋଣ	120^0

ଉଦାହରଣ - 1 :

ଗୋଟିଏ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ 140^0 ହେଲେ, ବହୁଭୁଜର ବାହୁ ସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ବହୁଭୁଜର ବାହୁସଂଖ୍ୟା n

$\therefore$ n ସଂଖ୍ୟକ ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ = $\frac{2n-4}{n}$ ସମକୋଣ

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $\frac{2n-4}{n} \times 90^0 = 140^0 \Rightarrow (2n-4)\ 90 = n \times 140$

$\Rightarrow 2n \times 90 - 4 \times 90 = 140n \Rightarrow 180n - 360 = 140n$

$\Rightarrow 180n - 140n = 360 \Rightarrow 40n = 360 \Rightarrow n = 9$

$\therefore$ ସୁଷମବହୁଭୁଜର ବାହୁ ସଂଖ୍ୟା 9 ।

ଉଦାହରଣ - 2 :

ଗୋଟିଏ ବହୁଭୁଜର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି, ଏହାର ବହିଃସ୍ଥକୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟିର ତିନି ଗୁଣ ହେଲେ, ବହୁଭୁଜର ବାହୁସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ବହୁଭୁଜର ବାହୁସଂଖ୍ୟା n

$\therefore$ n ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ବହୁଭୁଜର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି $= (2n-4) \times 90^0$

ଏବଂ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି $= 360^0$

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ, $(2n-4) \times 90^0 = 3 \times 360^0 \Rightarrow 180n - 360 = 1080$

$\Rightarrow 180n = 1440 \Rightarrow n = \frac{1440}{180} = 8$, $\therefore$ ବହୁଭୁଜର ବାହୁସଂଖ୍ୟା 8 ।

ଉଦାହରଣ - 3 :

ଗୋଟିଏ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ 144^0 । ଉକ୍ତ ବହୁଭୁଜର ଦୁଇଗୁଣ ସଂଖ୍ୟକ ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ 144^0 ।

$\therefore$ ବହୁଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ $= 180^0 - 144^0 = 36^0$

$\Rightarrow$ ବହୁଭୁଜର ବାହୁସଂଖ୍ୟା $= \frac{360^0}{36^0} = 10$

ନୂତନ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ବାହୁସଂଖ୍ୟା $= 2 \times 10 = 20$

$\therefore$ ବହୁଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ $= \frac{360^0}{20} = 18^0$

$\Rightarrow$ ବହୁଭୁଜର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ $= 180^0 - 15^0 = 162^0$ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3 (a)

(କ) ବିଭାଗ

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

 (i) ଗୋଟିଏ ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜର କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି ---- ।

 (ii) ଗୋଟିଏ ପଞ୍ଚଭୁଜର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି---- ।

 (iii) ଗୋଟିଏ ଅଷ୍ଟଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି ---- ।

(iv) ଗୋଟିଏ ସୁଷମ ଷଡ଼ଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ---- ।

(v) ଗୋଟିଏ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ 45^0 ହେଲେ ବହୁଭୁଜର ବାହୁସଂଖ୍ୟା ---।

(vi) ଗୋଟିଏ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ 150^0 ହେଲେ, ବହୁଭୁଜର ବାହୁସଂଖ୍ୟା--- ।

(vii) ଗୋଟିଏ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 1440^0 ହେଲେ, ବହୁଭୁଜର ବାହୁସଂଖ୍ୟା---- ।

(viii) ଗୋଟିଏ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ବାହୁସଂଖ୍ୟା 9 ହେଲେ, ଏହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ---- ।

(ix) n ସଂଖ୍ୟକ ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ---।

(x) n ସଂଖ୍ୟକ ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ---- ।

(ଖ) ବିଭାଗ

2. (i) ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର କୋଣମାନଙ୍କର ଅନୁପାତ 2:3:4:6 ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।

   (ii) ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ଦୁଇ କ୍ରମିକ କୋଣ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକର ପରିମାଣ ଅନ୍ୟର ପରିମାଣର $\frac{3}{2}$ ଗୁଣ ହେଲେ କୋଣଗୁଡ଼ିକର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।

   (iii) ଗୋଟିଏ ପଞ୍ଚଭୁଜର କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ଅନୁପାତ 2:3:4:5:6 ହେଲେ ବୃହତ୍ତମ କୋଣର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।

   (iv) ଗୋଟିଏ ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଦୁଇଟି କୋଣ ସମକୋଣ ଏବଂ ଅନ୍ୟ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ପ୍ରତ୍ୟେକ 120^0 ହେଲେ, ବହୁଭୁଜର ବାହୁ ସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର କର ।

   (v) ଗୋଟିଏ ପଞ୍ଚଭୁଜର କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣ $x^0, (x-10)^0, (x-20)^0, (2x-40)^0, (2x-90)^0$ ହେଲେ 'x' ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

   (vi) ଗୋଟିଏ ଅଷ୍ଟଭୁଜର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣ ମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି ଏବଂ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ସମଷ୍ଟି ସ୍ଥିର କର ।

   (vii) ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ଦୁଇ କ୍ରମିକ କୋଣଦ୍ୱୟର ପରିମାଣର ଅନୁପାତ 2:3 ହେଲେ, ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ଅନ୍ୟକୋଣ ମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।

(ଗ) ବିଭାଗ

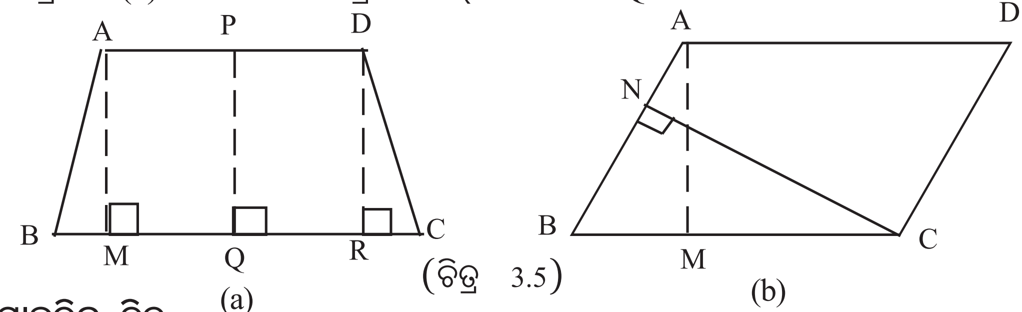
3. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ଗୋଟିଏ ସୁଷମ ପଞ୍ଚଭୁଜର ଗୋଟିଏ ଅନ୍ତଃସ୍ଥକୋଣର ପରିମାଣ ଏହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣର ତିନିଗୁଣ ।
4. ABCDE ଗୋଟିଏ ସୁଷମ ପଞ୍ଚଭୁଜ ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜ ΔBED ର ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।
5. ଗୋଟିଏ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଏବଂ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣର ଅନୁପାତ 5:1 ହେଲେ, ବହୁଭୁଜର ବାହୁସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର କର ।
6. n ସଂଖ୍ୟକ ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ଓ (n+2) ସଂଖ୍ୟକ ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ମଧ୍ୟରେ ଅନ୍ତର 9^0 ହେଲେ, ବହୁଭୁଜର ବାହୁସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର କର ।
7. ଗୋଟିଏ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ 120^0 ହେଲେ, ବହୁଭୁଜର ବାହୁସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର କର ।
8. (n–1) ସଂଖ୍ୟକ ଏବଂ (n+2) ସଂଖ୍ୟକ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର 6^0 ହେଲେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ, 'n' ର ମାନ 13 ହେବ ।
9. ଗୋଟିଏ ପଞ୍ଚଭୁଜର ଗୋଟିଏ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ 140^0 । ଅନ୍ୟ କୋଣଗୁଡ଼ିକର ପରିମାଣର ଅନୁପାତ 1:2:3:4 ହେଲେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ବୃହତ୍ତମ କୋଣର ପରିମାଣ 160^0 ।
10. ABCDE ଗୋଟିଏ ସୁଷମ ପଞ୍ଚଭୁଜର $\overline{AD}$, $\angle CDE$କୁ ଦୁଇଭାଗ କରୁଥିଲେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $m\angle ADE : m\angle ADC = 1 : 2$ ।

3.5 କେତେକ ବିଶେଷ ଚତୁର୍ଭୁଜ :

ଚତୁର୍ଭୁଜର ବିପରୀତ ବାହୁଯୋଡ଼ା ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସମାନ୍ତରଣର ସର୍ତ୍ତ ଅନୁଯାୟୀ ଚତୁର୍ଭୁଜ ମୁଖ୍ୟତଃ ଦୁଇ ଭାଗରେ ବିଭକ୍ତ, ଯଥା : (1) ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍, (2) ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ।

1. **ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍ : ଯେଉଁ ଚତୁର୍ଭୁଜର କେବଳ ଏକ ଯୋଡ଼ା ବିପରୀତ ବାହୁ ସମାନ୍ତର ତାହାକୁ ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍ (Trapezium) କୁହାଯାଏ ।** ଚିତ୍ର 3.5(a) ରେ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ହେତୁ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଏକ ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍ । ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{DC}$ ଦ୍ୱୟ ଅସମାନ୍ତର ।

ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର ଦୁଇ ସମାନ୍ତର ବାହୁ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତାକୁ ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା (Height) କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ର 3.5(a) ରେ ABCD ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା PQ ।



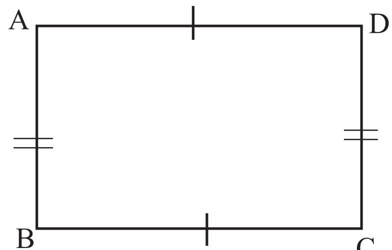
(ଚିତ୍ର 3.5)

2. ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର

ଯେଉଁ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଦୁଇଯୋଡ଼ା ବିପରୀତ ବାହୁ ସମାନ୍ତର ତାହା ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର (Parallelogram) ।

ଚିତ୍ର 3.5(b) ରେ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର ବିପରୀତ ବାହୁ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ଏବଂ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ । ଉକ୍ତ ଚତୁର୍ଭୁଜକୁ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର କୁହାଯାଏ ।

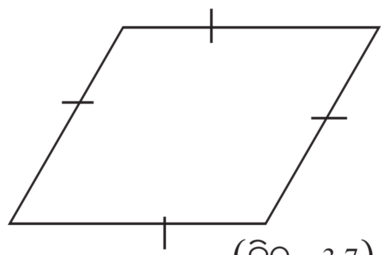
ଚିତ୍ର 3.5(b)ରେ ଥିବା ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରରେ ବିପରୀତ ବାହୁ $\overline{AD}$ ଓ $\overline{BC}$ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା AM ଏବଂ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା CN । ABCD ସାମାନ୍ତରିକଚିତ୍ରର $\overline{BC}$ ଅଥବା $\overline{AD}$ ବାହୁକୁ ଭୂମି ନିଆଗଲେ AM କୁ ଉଚ୍ଚତା ରୂପେ ନିଆଯାଏ । ସେହିପରି $\overline{AB}$ ଅଥବା $\overline{DC}$ ଭୂମି ହେଲେ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ଉଚ୍ଚତା CN ହୁଏ ।



(ଚିତ୍ର 3.6)

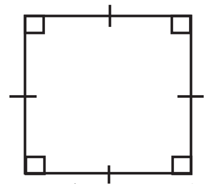
(i) ଆୟତଚିତ୍ର : ଯେଉଁ ଚତୁର୍ଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣ ସମକୋଣ ତାହା ଏକ ଆୟତ ଚିତ୍ର (Rectangle) । ଆଗକୁ ପ୍ରମାଣ କରାଯିବ ଯେ ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣ ସମକୋଣ ହେଲେ ବିପରୀତ ବାହୁମାନ ସମାନ୍ତର ହେବେ । ତେଣୁ ଆୟତ ଚିତ୍ର ଏକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ପ୍ରକାରର ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର, ଯାହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣର ପରିମାଣ 90^0 । ଚିତ୍ର 3.6 ରେ ଏକ ଆୟତଚିତ୍ର ABCD ପ୍ରଦର୍ଶିତ ହୋଇଛି ।

(ii) ରମ୍ବସ୍ : ଯେଉଁ ଚତୁର୍ଭୁଜର ବାହୁମାନଙ୍କ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ତାହା ଏକ ରମ୍ବସ୍ (Rhombus) । ଆଗକୁ ପ୍ରମାଣ କରାଯିବ ଯେ ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ହେଲେ ବିପରୀତ ବାହୁମାନ


(ଚିତ୍ର 3.7)

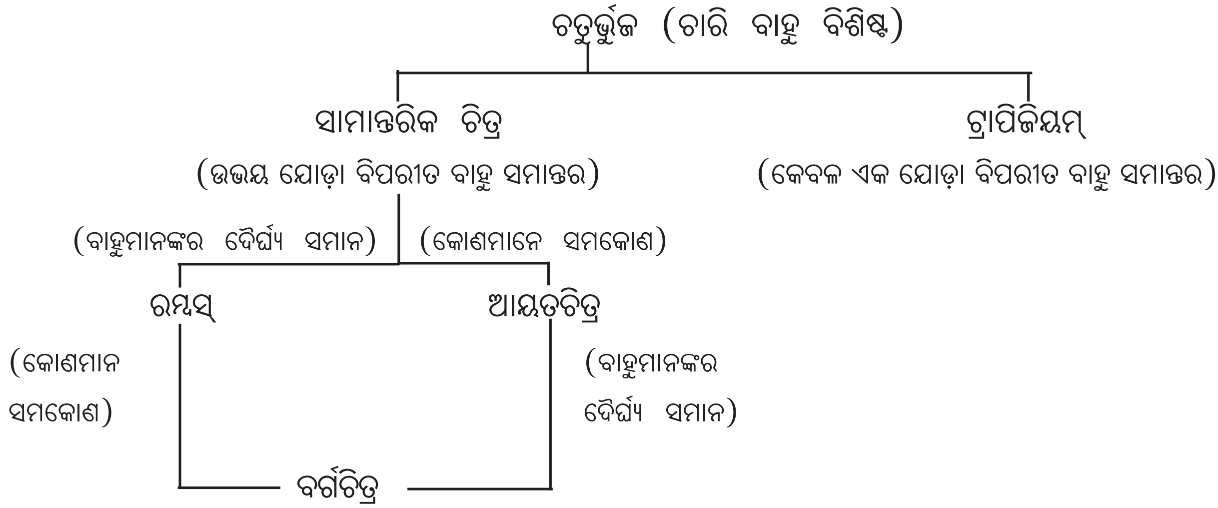
ମଧ୍ୟ ସମାନ୍ତର ହେବେ । ତେଣୁ ରମ୍ବସ୍ ମଧ୍ୟ ଗୋଟିଏ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ପ୍ରକାରର ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର, ଯାହାର ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ । ଚିତ୍ର 3.7 ରେ ABCD ଏକ ରମ୍ବସ୍ ।

(iii) ବର୍ଗଚିତ୍ର : ଯେଉଁ ଚତୁର୍ଭୁଜର ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ଓ ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣର ପରିମାଣ 90^0 ତାହା ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର (Square) । ଏଣୁ ବର୍ଗଚିତ୍ର ଏକ ସମକୋଣ ବିଶିଷ୍ଟ ରମ୍ବସ୍ ଅଟେ । ଚିତ୍ର 3.8 ରେ ABCD ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର ।



(ଚିତ୍ର 3.8)

ଉପରେ ଆଲୋଚିତ ଚତୁର୍ଭୁଜମାନଙ୍କର ପ୍ରକାରଭେଦକୁ ନିମ୍ନ ଚାର୍ଟରେଦର୍ଶାଯାଇଛି, ଦେଖ-



3.6 କେତେକ ଉପପାଦ୍ୟ :

ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଯେଉଁ ବିକଳ୍ପ ସର୍ତ୍ତରେ ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ବା ରମ୍ବସ ବା ଆୟତଚିତ୍ର ହୋଇପାରେ, ସେପରି କେତେକ ବିକଳ୍ପ ସର୍ତ୍ତ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉପପାଦ୍ୟ ମାନଙ୍କରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

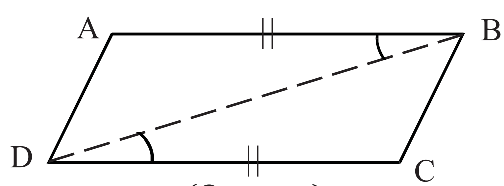
ଉପପାଦ୍ୟ - 20

ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଦୁଇଟି ବିପରୀତ ବାହୁ ସର୍ବସମ ଓ ସମାନ୍ତର ହେଲେ ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର । (If two opposite sides of a quadrilateral are congruent and parallel, the quadrilateral is a parallelogram.)

ଦତ୍ତ : ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ଏବଂ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : ABCD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

ଅଙ୍କନ : କର୍ଣ୍ଣ $\overline{BD}$ ଅଙ୍କନ କର ।



(ଚିତ୍ର 3.9)

ପ୍ରମାଣ : Δ ABD ଓ Δ BDC ରେ

$\because$ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (ଦତ୍ତ)
$\overline{BD}$ ସାଧାରଣ ବାହୁ
ଏବଂ $\angle ABD \cong \angle BDC$ (ଏକାନ୍ତର କୋଣ)

$\therefore \Delta\ ABD \cong \Delta\ BCD$ (ବା-କୋ-ବା ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ)

$\Rightarrow m\angle ADB = m\angle DBC$ (ସର୍ବସମ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ କୋଣ) କିନ୍ତୁ ଏମାନେ ଏକାନ୍ତର

$\Rightarrow \overline{AD} \parallel \overline{BC}$

$\therefore$ ABCD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର । (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉପପାଦ୍ୟ - 21

ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ବିପରୀତ ବାହୁମାନେ ସର୍ବସମ ।

(The opposite sides of a parallelogram are congruent.)

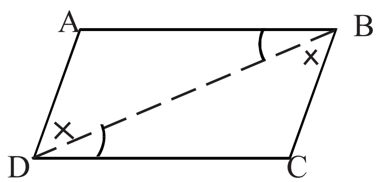
ଦତ୍ତ : ABCD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର, ଅର୍ଥାତ୍

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ଏବଂ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ଏବଂ $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

ଅଙ୍କନ : କର୍ଣ୍ଣ $\overline{BD}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : Δ ABD ଓ Δ BCD ରେ



(ଚିତ୍ର 3.10)

$\because$ { $\angle ABD \cong \angle BDC$ (ଏକାନ୍ତରକୋଣ)
$\angle ADB \cong \angle DBC$ (ଏକାନ୍ତରକୋଣ)
ଏବଂ $\overline{BD}$ ସାଧାରଣ ବାହୁ

$\therefore \Delta\ ABD \cong \Delta BDC$ (କୋ-ବା-କୋ ଉପପାଦ୍ୟ)

$\Rightarrow AB = CD$ ଏବଂ $AD = BC$

$\Rightarrow \overline{AB} \cong \overline{CD}$ ଏବଂ $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉପପାଦ୍ୟ - 22

ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର ବିପରୀତ ବାହୁମାନ ସର୍ବସମ ହେଲେ ଏହା ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ।

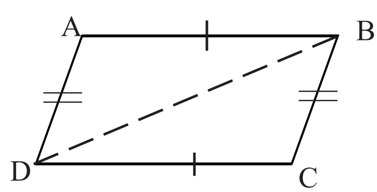
(A quadrilateral is a parallelogram if both pairs of its opposite sides are congruent.)

ଦତ୍ତ : ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : ABCD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର, ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ଓ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

ଅଙ୍କନ : କର୍ଣ୍ଣ $\overline{BD}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : Δ ABD ଓ Δ BDC ରେ



(ଚିତ୍ର 3.11)

$\because$ { $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (ଦତ୍ତ)
$\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (ଦତ୍ତ)
ଏବଂ $\overline{BD}$ ସାଧାରଣ ବାହୁ

$\therefore \Delta\, ABD \cong \Delta\, BDC$ (ବା-ବା-ବା ଉପପାଦ୍ୟ)

$\Rightarrow m\angle ABD = m\angle BDC$ ଏବଂ $m\angle ADB = m\angle CBD$ (ସର୍ବସମ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ କୋଣ)

$\Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ଏବଂ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

= ABCD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର । (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉପପାଦ୍ୟ - 23

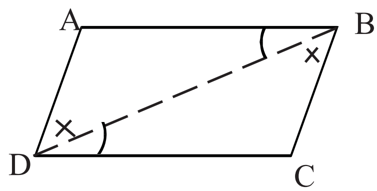
ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ବିପରୀତ କୋଣମାନେ ସର୍ବସମ ।

(The opposite angles of a parallelogram are congruent.)

ଦତ୍ତ : ABCD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର । ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ଏବଂ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

ପ୍ରମାଣ୍ୟ : $\angle A \cong \angle C$, $\angle B \cong \angle D$

ଅଙ୍କନ : କର୍ଣ୍ଣ $\overline{BD}$ ଅଙ୍କନ କର ।



(ଚିତ୍ର 3.12)

ପ୍ରମାଣ : ΔABD ଓ ΔBDC ମଧ୍ୟରେ

$\because$ $\begin{cases} m\angle ABD = m\angle BDC & [\because \overline{AB} \parallel \overline{CD}] \\ m\angle ADB = m\angle CBD & [\because \overline{AD} \parallel \overline{BC}] \\ \overline{BD} \text{ ସାଧାରଣ ବାହୁ ।} \end{cases}$

$\because \Delta\, ABD \cong \Delta BDC$ (କୋ-ବା-କୋ ଉପପାଦ୍ୟ)

$\Rightarrow m\angle A = m\angle C \quad \Rightarrow \angle A \cong \angle C$

ସେହିପରି $\Delta\, ABC$ ଓ $\Delta\, ADC$ ନେଇ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରେ ଯେ,

$m\angle B = m\angle D \Rightarrow \angle B \cong \angle D$ (ପ୍ରମାଣିତ)

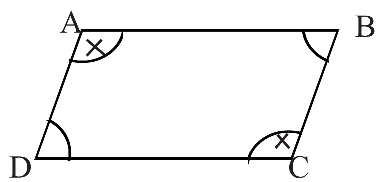
ଉପପାଦ୍ୟ - 24

ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର ବିପରୀତ କୋଣମାନ ସର୍ବସମ ହେଲେ ଏହା ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ।

(A quadrilateral whose opposite angles are congruent, is a parallelogram.)

ଦତ୍ତ : ଚତୁର୍ଭୁଜ ABCD ରେ $\angle A \cong \angle C$ ଓ $\angle B \cong \angle D$

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : ABCD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ।



(ଚିତ୍ର 3.13)

ପ୍ରମାଣ : ABCD ଏକ ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜ ।

$\therefore m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360^0$

ପୁନଶ୍ଚ : $m\angle A = m\angle C$ ଏବଂ $m\angle B = m\angle D$ (ଦତ୍ତ)

$\Rightarrow m\angle A + m\angle B = m\angle C + m\angle D = \frac{360^0}{2} = 180^0$

$\Rightarrow \overline{AD} \parallel \overline{BC}$ .... (i)

ପୁନଶ୍ଚ $m\angle A + m\angle D = m\angle B + m\angle C = \frac{360^0}{2} = 180^0$

$\Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{CD}$ .... (ii)

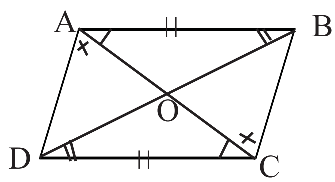
(i) ଓ (ii) ରୁ ପାଇବା ABCD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର । (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉପପାଦ୍ୟ - 25

ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି ।

(Diagonals of a parallelogram bisect each other.)

ଦତ୍ତ : ABCD ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ।



(ଚିତ୍ର 3.14)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : AO = CO ଏବଂ BO = DO

ପ୍ରମାଣ : Δ AOB ଓ Δ COD ରେ

$\because$ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

$\angle ABO \cong \angle ODC$ (ଏକାନ୍ତର କୋଣ)

ଏବଂ $\angle BAO \cong \angle OCD$ (ଏକାନ୍ତର କୋଣ)

$\therefore \Delta AOB \cong \Delta COD$ (କୋ-ବା-କୋ ଉପପାଦ୍ୟ)

$\Rightarrow$ AO = CO ଏବଂ BO = DO (ଅନୁରୂପ ବାହୁ) (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉପପାଦ୍ୟ - 26

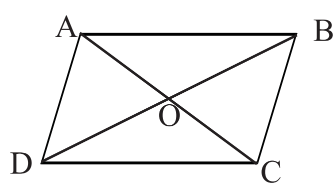
ଯେଉଁ ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି ତାହା ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ।

(A quardrilateral whose diagonals bisect each other is a parallelogram.)

ଦତ୍ତ : ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ର ଛେଦବିନ୍ଦୁ O; AO = CO ଏବଂ BO = DO

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : ABCD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର । ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ଏବଂ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

ପ୍ରମାଣ : Δ AOB ଓ Δ COD ରେ



(ଚିତ୍ର 3.15)

$\because$ AO = CO (ଦତ୍ତ)

BO = DO (ଦତ୍ତ)

$m\angle AOB = m\angle COD$ (ପ୍ରତୀପ କୋଣ)

$\therefore \Delta AOB \cong \Delta COD$ (ବା-କୋ-ବା ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ)

$\Rightarrow m\angle ABO = m\angle ODC$ (ସର୍ବସମ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ କୋଣ)

$\Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{DC}$

ସେହିପରି Δ AOD ଏବଂ Δ BOC ନେଇ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରେ ଯେ, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

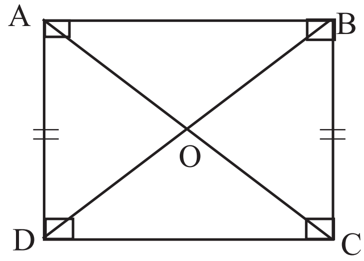
$\therefore$ ABCD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର । (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉପପାଦ୍ୟ - 27

ଆୟତଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ । (The diagonals of a rectangle are congruent.)

ଦତ୍ତ : ABCD ଏକ ଆୟତ ଚିତ୍ର ଓ $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ ଏହାର କର୍ଣ୍ଣ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\overline{AC} \cong \overline{BD}$



(ଚିତ୍ର 3.16)

ପ୍ରମାଣ : Δ ADC ଓ Δ BDC ମଧ୍ୟରେ

$\because \begin{cases} \overline{AD} \cong \overline{BC} \\ \angle ADC \cong \angle BCD \quad \text{(ସମକୋଣ)} \\ \text{ଏବଂ } \overline{DC} \text{ ସାଧାରଣ ବାହୁ ।} \end{cases}$

$\therefore \Delta ADC \cong \Delta BDC$ (ବା-କୋ-ବା ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ)

$\Rightarrow \overline{AC} \cong \overline{BD}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

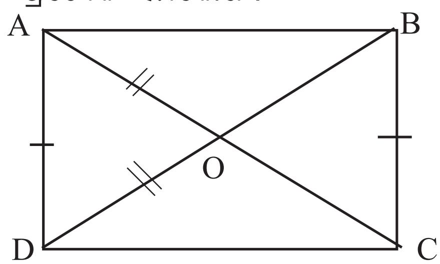
ଉପପାଦ୍ୟ - 28

ଯେଉଁ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ତାହା ଏକ ଆୟତଚିତ୍ର ।

(If the diagonals of a parrallelogram are congruent, it is a rectangle.)

ଦତ୍ତ : ABCD ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରରେ କର୍ଣ୍ଣ $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : ABCD ଏକ ଆୟତଚିତ୍ର ଅର୍ଥାତ୍ $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମକୋଣ ।



(ଚିତ୍ର 3.17)

ପ୍ରମାଣ : Δ ADC ଓ Δ BDC ମଧ୍ୟରେ

$\because \begin{cases} \overline{AD} \cong \overline{BC} \\ \overline{AC} \cong \overline{BD} \quad \text{(ଦତ୍ତ)} \\ \text{ଏବଂ } \overline{DC} \text{ ସାଧାରଣ ବାହୁ ।} \end{cases}$

$\therefore \Delta ADC \cong \Delta BDC$ (ବା-କୋ-ବା ଉପପାଦ୍ୟ)

$\Rightarrow m\angle ADC = m\angle BCD$ (ସର୍ବସମ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ କୋଣ ହେତୁ)

ପୁନଶ୍ଚ, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ (ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ବିପରୀତ ବାହୁ ହେତୁ)

$\Rightarrow m\angle ADC + m\angle BCD = 180^0$

$\therefore m\angle ADC = m\angle BCD = 90^0$

ସେହିପରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇ ପାରିବ ଯେ $m\angle DAB = m\angle ABC = 90^0$

$\therefore$ ABCD ଏକ ଆୟତ ଚିତ୍ର । (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉପପାଦ୍ୟ - 29

ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ୍‌ର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।

(The diagonals of a rhombus are perpendicular to each other.)

ଦତ୍ତ : ABCD ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ ଏବଂ $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ ଏହାର ଦୁଇ କର୍ଣ୍ଣ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

ପ୍ରମାଣ : ମନେକର $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ।

Δ AOD ଓ Δ DOC ରେ

$\because$ { AO = CO; AD = DC [$\because$ ABCD ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ]; ଏବଂ $\overline{DO}$ ସାଧାରଣ ବାହୁ }

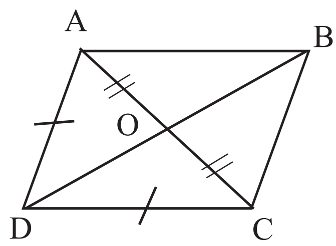
$\therefore$ $\Delta AOD \cong \Delta DOC$ (ବା-ବା-ବା ଉପପାଦ୍ୟ)

$\Rightarrow m\angle AOD = m\angle DOC$

କିନ୍ତୁ $m\angle AOD + m\angle DOC = 180^0$

$\therefore$ $m\angle AOD = m\angle DOC = 90^0$

ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ । (ପ୍ରମାଣିତ)



(ଚିତ୍ର 3.18)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 : ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ଓ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେଲେ ଏହା ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ -2 : ଗୋଟିଏ ବର୍ଗଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ଓ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ -3 : ଯେଉଁ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ,ତାହା ଏକ ରମ୍ବସ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ– 3 (b)

(କ) ବିଭାଗ

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକ ଭୁଲ୍ କି ଠିକ୍ ଲେଖ।
   (a) ଚତୁର୍ଭୁଜର ଚାରୋଟି ବାହୁ ସର୍ବସମ ହେଲେ, ତାହା ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର।
   (b) ପ୍ରତ୍ୟେକ ରମ୍ବସ ଏକ ସାମାନ୍ତରିକଚିତ୍ର।
   (c) ପ୍ରତ୍ୟେକ ସାମାନ୍ତରିକଚିତ୍ର ଏକ ରମ୍ବସ୍।
   (d) ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ଦୁଇ ସନ୍ନିହିତ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ହେଲେ, ତାହା ଏକ ରମ୍ବସ୍।
   (e) ରମ୍ବସ୍‌ର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ।
   (f) ଗୋଟିଏ ଆୟତଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି।
   (g) ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ୍‌ର ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ 90^0 ହେଲେ, ତାହା ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର।

(h) ଗୋଟିଏ ବର୍ଗଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମକୋଣରେ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି।

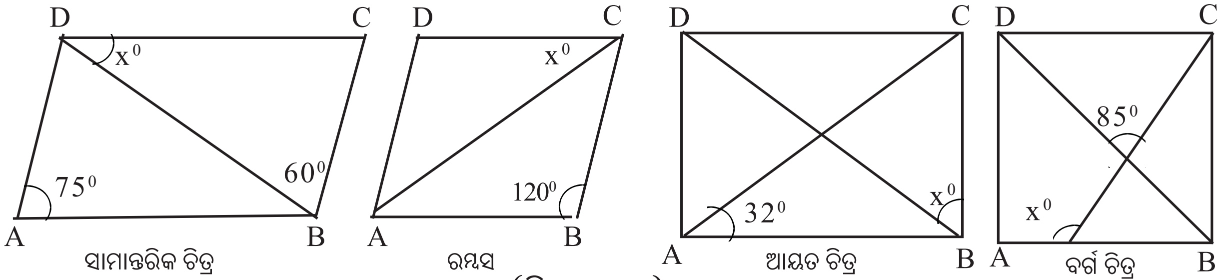
(i) ଯଦି ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର।

(j) ପ୍ରତ୍ୟେକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ଏକ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍।

(k) ପ୍ରତ୍ୟେକ ବର୍ଗଚିତ୍ର ଏକ ଆୟତ ଚିତ୍ର।

(l) ରମ୍ବସ ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର।

2. ନିମ୍ନଚିତ୍ରଗୁଡ଼ିକୁ ଦେଖି "x"ର ମୂଲ୍ୟ ସ୍ଥିର କର।



(ଚିତ୍ର 3.19)

3. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର।

(a) ---- ର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ଏବଂ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ।

(b) ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $\angle A$ ଓ $\angle B$ ପରସ୍ପର ପରିପୂରକ ହେଲେ, ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ----।

(c) ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେଲେ ରମ୍ବସଟି ---।

(d) ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର AB = CD, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ହେଲେ ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ----।

(e) ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର AB = BC ଏବଂ AC = BD ଏବଂ $\angle B$ ଏକ ସମକୋଣ ହେଲେ ଚତୁର୍ଭୁଜଟି --।

(f) ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ୍‌ର ଗୋଟଏ କୋଣର ପରିମାଣ 90^0 ହେଲେ, ରମ୍ବସ୍‌ଟି ----।

(g) ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି ଏବଂ $m\angle A = 90^0$ ହେଲେ, ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ----।

(h) ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି ଏବଂ $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ ହେଲେ, ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ----।

(ଖ) ବିଭାଗ

4.(i) ABCD ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରରେ $m\angle B = (x+30^0)$ ଓ $m\angle C = (2x-60^0)$ ହେଲେ $m\angle A$ କେତେ ?

(ii) ABCD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର। $\angle A$ ଓ $\angle B$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରନ୍ତି। $\angle APB$ର ପରିମାଣ କେତେ ?

(iii) ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସର କ୍ଷୁଦ୍ରତର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଏକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସହ ସମାନ ହେଲେ, ରମ୍ବସର ବୃହତ୍ତର କୋଣର ପରିମାଣ କେତେ ?

(iv) ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ଦୁଇଟି କ୍ରମିକ ଶୀର୍ଷରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ଅନୁପାତ 2 : 3 ହେଲେ, ବୃହତ୍ତର କୋଣର ପରିମାଣ କେତେ ?

(v) ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ ଏହାର ଏକ ସନ୍ନିହିତ କୋଣର $\frac{4}{5}$ ହେଲେ, ସନ୍ନିହିତ କୋଣଦ୍ୱୟର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର।

5.(i) ABCD ଏକ ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜ। ଏଥିରେ $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ ର ପରିମାଣ ଯଥାକ୍ରମେ $\angle A$ ର ପରିମାଣର ଦୁଇଗୁଣ, ତିନିଗୁଣ, ଚାରିଗୁଣ ହେଲେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ଏହା ଏକ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍।

(ii) ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $\angle A$ ଓ $\angle B$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ଏବଂ $\angle AOB$ ଏକ ସମକୋଣ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣକର ଯେ, ABCD ଏକ ଟ୍ରାପଜିୟମ୍।

(iii) ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $\angle ADC$ ଏକ ସମକୋଣ, $m\angle BAC = m\angle ACB = 45^0$ ଏବଂ AD = DC ହେଲେ, ପ୍ରମାଣକର ଯେ, ଏହା ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର ।

(iv) ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜରେ AD = BC = 3 ସେ.ମି, AB = 8 ସେମି। $\overline{AB}$ ଉପରେ E ଓ F ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ। ଯେପରିକି A-E-F ଏବଂ EF = 2 ସେମି। $m\angle BCF = m\angle BFC = m\angle AED = m\angle ADE = 45^0$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, ABCD ଏକ ଆୟତଚିତ୍ର।

(v) ABCD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର। ଯଦି AB = 2AD ଏବଂ P, $\overline{CD}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ହୁଏ, ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $\angle APB = 90^0$

6. ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ରେ $m\angle ABD = m\angle BDC$ ଏବଂ $m\angle ADB = m\angle CBD$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣକର ଯେ, ଏହା ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ଏବଂ $\Delta ABC \cong \Delta ADC$

(ଗ) ବିଭାଗ

7. ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ । $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ଯଥାକ୍ରମେ $\angle BAD$ ଓ $\angle CDA$ କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରୁଥିଲେ ପ୍ରମାଣକର ଯେ, AB = BC = CD

8. ABCD ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର । $\angle A$ ଓ $\angle C$ ର ସମଦ୍ୱିଣ୍ଡକ ଯଥାକ୍ରମେ $\overrightarrow{AP}$ ଓ $\overrightarrow{CQ}$ । ଏମାନେ ଯଦି $\overline{BC}$ ଓ $\overline{AD}$ କୁ ଯଥାକ୍ରମେ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରନ୍ତି, ପ୍ରମାଣ କରଯେ, APCQ ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର।

9. ABCD ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରରେ M ଓ N ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{DC}$ ଓ $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ। ପ୍ରମାଣ କରଯେ,
   (i) MCBN ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର,
   (ii) DMBN ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ଏବଂ
   (iii) $\overline{DB}$ ଓ $\overline{MN}$ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି।

10. ABCD ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରରେ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି। $\overline{DO}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ X ଓ $\overline{BO}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ Y ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କରଯେ, AXCY ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର।

11. ABCD ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର। $\overline{AC}$ ଉପରେ K, L ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ଯେପରିକି AK = CL, ପ୍ରମାଣକରଯେ, DKBL ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର।

12. ABCD ଗୋଟିଏ ସାମନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର। $\overline{BD}$ ଉପରେ P ଓ Q ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ଯେପରିକି $\overline{AP} \parallel \overline{CQ}$ । ପ୍ରମାଣକର ଯେ, DP = BQ ଏବଂ APCQ ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ।

13. ABCD ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରରେ $\overline{DK} \perp \overline{AC}$, $\overline{BL} \perp \overline{AC}$ ଏବଂ K ଓ L ଯଥାକ୍ରମେ ଲମ୍ବଦ୍ୱୟର ପାଦବିନ୍ଦୁ। ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, DKBL ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର।

14. ABCD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକଚିତ୍ର । $\overline{AD}$ ଉପରେ P ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଯେପରିକି DC = DP, $\overrightarrow{CP}$ ଓ $\overrightarrow{BA}$ ପରସ୍ପରକୁ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଥିଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

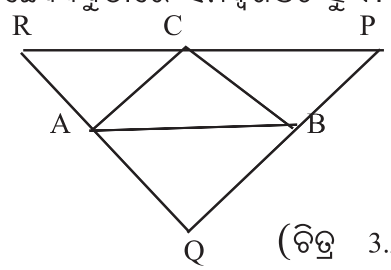
(i) AQ = AP (ii) BC = BQ (iii) AD = CD + AQ

15. ABCD ସାମାନ୍ତରିକଚିତ୍ରରେ $\overline{DC}$ ବାହୁ ଉପରେ X ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଯେପରିକି AD = AX । ପ୍ରମାଣକର ଯେ, $m\angle XAB = m\angle ABC$ ଏବଂ AC = BX

16. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର କୋଣମାନଙ୍କର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ରେଖାମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଏକ ଆୟତଚିତ୍ର ।

17. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟଦେଇ ଅଙ୍କିତ ଓ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ବାହୁମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ସୀମାବଦ୍ଧ ରେଖାଖଣ୍ଡ କର୍ଣ୍ଣମାନଙ୍କ ଛେଦବିନ୍ଦୁଠାରେ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହୁଏ ।

18. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 3.20 ରେ $\overline{RP} \parallel \overline{AB}$, $\overline{RQ} \parallel \overline{BC}$ ଏବଂ $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$ ହେଲେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $BC = \frac{1}{2}\ QR$



(ଚିତ୍ର 3.20)

3.7. ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା ଏବଂ ତ୍ରିଭୁଜ (Parallel lines and Triangles) :

ଆଲୋଚିତ ସମସ୍ତ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଉପପାଦ୍ୟର ସହାୟତାରେ ଆମେ ତ୍ରିଭୁଜ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ଉପାଦେୟ ଉପପାଦ୍ୟର ଆଲୋଚନା ଏଠାରେ କରିବା । ଏହି ଉପପାଦ୍ୟ ଗୁଡ଼ିକୁ ପରେ ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ଚିତ୍ର ଗୁଡ଼ିକରେ ପ୍ରୟୋଗ କରି ବିଭିନ୍ନ ଜ୍ୟାମିତିକ ତଥ୍ୟର ଅବତାରଣା କରି ପାରିବା । ଏହି ଉପପାଦ୍ୟ ଗୁଡ଼ିକ ଆଲୋଚିତ ଉପପାଦ୍ୟ ଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରୟୋଗରେ ହିଁ ପ୍ରମାଣିତ ହୋଇଛି ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 30

ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଏକ ବାହୁର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁରୁ ଅନ୍ୟ ଏକ ବାହୁ ସହ ସମାନ୍ତର ଭାବେ ଅଙ୍କିତ ସରଳରେଖା ତୃତୀୟ ବାହୁକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ।

(In a triangle, a line drawn through the mid-point of one side parallel to another side, bisects the third side)

ଦତ୍ତ : Δ ABC ରେ $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ D ଏବଂ $\overleftrightarrow{DG} \parallel \overline{BC}$

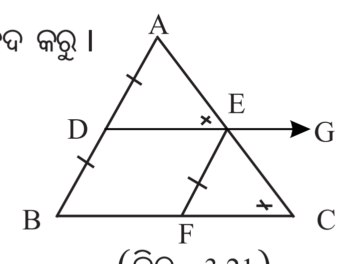
ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\overleftrightarrow{DG}$ ଓ $\overline{AC}$ ର ଛେଦବିନ୍ଦୁ E, $\overline{AC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ହେବ ।

ଅଙ୍କନ : E ମଧ୍ୟ ଦେଇ $\overline{AB}$ ସହ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା $\overline{BC}$କୁ F ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ ।

ପ୍ରମାଣ : $\because$ $\overline{DE} \parallel \overline{BF}$ (ଦତ୍ତ) ଓ $\overline{EF} \parallel \overline{BD}$ (ଅଙ୍କନ)

$\therefore$ BDEF ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ।

$\Rightarrow$ BD = EF $\Rightarrow$ AD = EF ($\because$ AD = BD)



(ଚିତ୍ର 3.21)

Δ ADE ଓ Δ EFC ରେ

$\because \begin{cases} AD = EF & \text{(ପୂର୍ବରୁ ପ୍ରମାଣିତ)} \\ m\angle ADE = m\angle EFC & \text{(ଅନୁରୂପ କୋଣ)} \\ \text{ଏବଂ } m\angle AED = m\angle ECF & \text{(ଅନୁରୂପ କୋଣ)} \end{cases}$

$\therefore \Delta ADE \cong \Delta EFC$ (କୋ-କୋ-ବା ଉପପାଦ୍ୟ)

$\Rightarrow AE = EC$ (ଅନୁରୂପ ବାହୁ) $\Rightarrow \overline{AC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ E (ପ୍ରମାଣିତ)

ମନ୍ତବ୍ୟ - 1 (ନିମ୍ନ ଆଲୋଚନା ଶିକ୍ଷକ ତଥା ଜିଜ୍ଞାସୁ ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀଙ୍କ ଲାଗି ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ।)

ଉପରୋକ୍ତ ଉପପାଦ୍ୟର ପ୍ରାମାଣ୍ୟରେ $\overleftrightarrow{DG}$, $\overline{AC}$ ବାହୁକୁ ଛେଦ କରିବ ବୋଲି ଚିତ୍ରାଙ୍କନ ଜନିତ ଧାରଣାରୁ ଧରିନିଆଯାଇଛି । ମାତ୍ର ପୂର୍ବରୁ ପଢ଼ିଥିବା ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଓ ଉପପାଦ୍ୟ ମାନଙ୍କର ସାହାଯ୍ୟରେ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରେ ଯେ $\overrightarrow{DG}$, $\overline{AC}$ ବାହୁକୁ ଛେଦ କରେ (ପ୍ରମାଣ ଦେଖ)

ପ୍ରମାଣ : A ଓ B, $\overleftrightarrow{DG}$ ର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ । ($\because$ A–D–B)

ଏବଂ B ଓ C, $\overleftrightarrow{DG}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ । ($\because \overline{BC} \parallel \overleftrightarrow{DG}$)

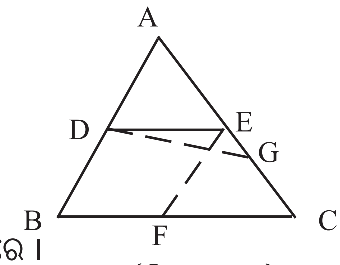
$\therefore$ A ଓ C, $\overleftrightarrow{DG}$ ର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

$\Rightarrow \overleftrightarrow{DG}$, $\overline{AC}$ କୁ ଛେଦ କରେ ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 31

ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଯେ କୌଣସି ଦୁଇବାହୁର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡ ତୃତୀୟ ବାହୁ ସହ ସମାନ୍ତର ଓ ଏହାର ଅର୍ଦ୍ଧ-ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ।

(The segment joining the midpoints of two sides of a triangle is parallel to the third side and its length is half of that of the third side.)



(ଚିତ୍ର 3.22)

ଦତ୍ତ : Δ ABC ରେ D ଓ E ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : (i) $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ଏବଂ (ii) $DE = \frac{1}{2}$ BC

ପ୍ରମାଣ : (i) ମନେକର D ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ; $\overline{BC}$ ପ୍ରତି ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା, $\overline{AC}$ କୁ G ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ ।

$\therefore \overline{AC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ G

$\Rightarrow G = E$ $\Rightarrow$ G ଓ E ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ଏକ ଏବଂ ଅଭିନ୍ନ ।

ମାତ୍ର $\overline{DG} \parallel \overline{BC}$ (ଧରିନିଆଯାଇଛି) $\Rightarrow \overline{DE} \parallel \overline{BC}$

(ii) ମନେକର E ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟଦେଇ ଅଙ୍କିତ $\overline{AB}$ ପ୍ରତି ସାମାନ୍ତର ସରଳରେଖାଖଣ୍ଡ $\overline{BC}$ କୁ F ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ ।

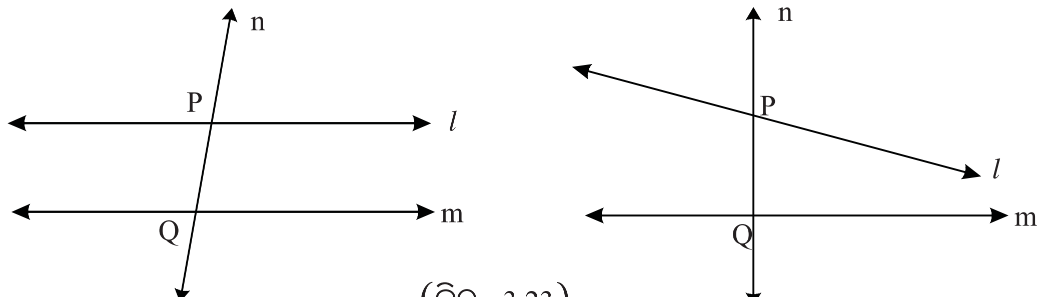
$\therefore \overline{BC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ F $\Rightarrow BF = CF = \frac{1}{2}$ BC

ପୁନଶ୍ଚ, BDEF ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ($\because \overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ଏବଂ $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$)

$\therefore$ DE = BF $\Rightarrow$ DE = $\frac{1}{2}$ BC (ପ୍ରମାଣିତ)

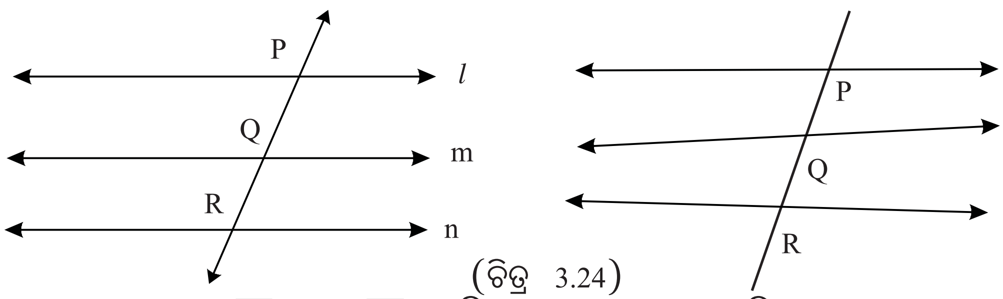
3.8 ଛେଦାଂଶ (Intercepts) :

ସଂଜ୍ଞା : ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ l ଓ m ଦୁଇଟି ସରଳ ରେଖା । ଯଦି ଏକ ଛେଦକ n, ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟକୁ P ଓ Q ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ, ତେବେ $\overline{PQ}$ କୁ ଛେଦକ ର ଏକ ଛେଦାଂଶ ବା ଛେଦିତ ଅଂଶ କୁହାଯାଏ । ଦତ୍ତ ଚିତ୍ର ଦ୍ୱୟକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କର ।



(ଚିତ୍ର 3.23)

ଯଦି ଏକ ସମତଳରେ ଦୁଇ ବା ତତୋଃଧିକ ସରଳରେଖା (ପରସ୍ପର ସମାନ୍ତର କିମ୍ବା ସମାନ୍ତର ନ ହୋଇବି ପାରନ୍ତି)କୁ ଗୋଟିଏ ଛେଦକ ଦୁଇ ବା ତତୋଃଧିକ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ, ତେବେ ଛେଦକର ଛେଦିତାଂଶ (Intercepts) ମଧ୍ୟ ଥାଏ । ନିମ୍ନ ଚିତ୍ରରୁ ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ।



(ଚିତ୍ର 3.24)

ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ $\overline{PQ}$ ଏବଂ $\overline{QR}$ ଛେଦିତାଂଶ (intercepts) ଅଟନ୍ତି।

ଟୀକା: (1) ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଛେଦିତାଂଶ ବା ଛେଦାଂଶ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ବା ଅସମାନ ହୋଇପାରନ୍ତି।

(2) ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରିବାର କଥା ଯେ, ଛେଦକର ଛେଦାଂଶ ମାନ, ଛେଦିତ ସରଳରେଖାମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ହୋଇଥାଏ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 32

ତିନି ବା ତତୋଃଧିକ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାକୁ ଛେଦ କରୁଥିବା ଏକ ଛେଦକର ଛେଦିତ ଅଂଶଗୁଡ଼ିକ ସର୍ବସମ ହେଲେ, ଅନ୍ୟ ଯେ କୌଣସି ଛେଦକର ଛେଦିତ ଅନୁରୂପ ଅଂଶ ଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟ ସର୍ବସମ ହେବ ।

(If three or more parallel lines have congruent intercepts on any transversal, they have congruent intercepts on any other transversal.)

(ଉପପାଦ୍ୟ ଟି ତିନୋଟି ସରଳରେଖା ପାଇଁ ପ୍ରମାଣ କଲେ ଯଥେଷ୍ଟ ।)

ଦତ୍ତ : ମନେକର $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$; T_1 ଛେଦକ L_1, L_2, L_3 କୁ ଯଥାକ୍ରମେ A, B, Cରେ ଛେଦ କରେ ଏବଂ $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ ଅର୍ଥାତ୍ AB = BC । L_1, L_2, L_3 କୁ ଅନ୍ୟ ଏକ ଛେଦକ T_2 ଯଥାକ୍ରମେ D, E, F ରେ ଛେଦ କରେ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : T_2 ର ଛେଦିତ ଅଂଶ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ଅର୍ଥାତ୍ DE = EF

ଅଙ୍କନ : E ବିନ୍ଦୁ ମଧ ଦେଇ T_1 ସହିତ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା L_1 ଓ L_3 କୁ P ଓ Q ରେ ଛେଦ କରୁ ।

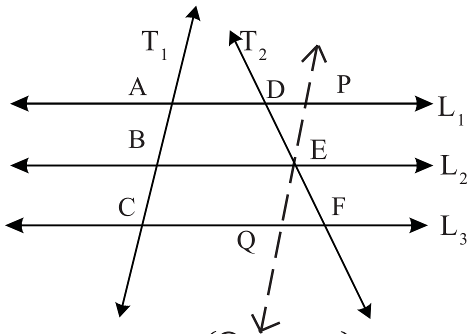
ପ୍ରମାଣ : $L_1 \parallel L_2$ (ଦତ୍ତ) ଓ $T_1 \parallel \overleftrightarrow{PE}$ (ଅଙ୍କନ)

$\therefore$ APEB ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର $\Rightarrow$ AB = PE

ସେହିପରି BC = EQ $\Rightarrow$ PE = EQ ($\because$ AB=BC (ଦତ୍ତ))

Δ DPE ଓ Δ EFQ ରେ

$\because$ m∠DEP = m∠FEQ (ପ୍ରତୀପକୋଣ)
m∠DPE = m∠EQF (ଏକାନ୍ତର କୋଣ)
ଏବଂ PE = EQ (ପୂର୍ବରୁ ପ୍ରମାଣିତ)



(ଚିତ୍ର 3.25)

$\therefore \Delta DPE \cong \Delta EFQ$ (କୋ-ବା-କୋ ଉପପାଦ୍ୟ)

$\Rightarrow$ DE = EF $\Rightarrow$ $\overline{DE} \cong \overline{EF}$

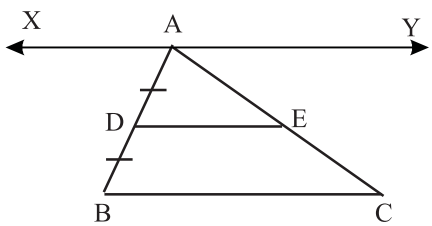
ଅର୍ଥାତ୍ T_2 ର ଛେଦିତ ଅଂଶଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ । (ପ୍ରମାଣିତ)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ: ଉପରୋକ୍ତ ଉପପାଦ୍ୟ- 32 ର ସହାୟତାରେ ଉପପାଦ୍ୟ- 30 **''ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଏକ ବାହୁରେ ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁରୁ ଅନ୍ୟ ଏକ ବାହୁ ସହ ସମାନ୍ତର ଭାବେ ଅଙ୍କିତ ସରଳରେଖା, ତୃତୀୟ ବାହୁକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ।''** ର ପ୍ରମାଣ ସମ୍ଭବ ।

ଦତ୍ତ: D, $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଏବଂ $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ: E, $\overline{AC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ।

ଅଙ୍କନ: A ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟଦେଇ, $\overline{BC}$ ସହ ସମାନ୍ତର କରି $\overleftrightarrow{XY}$ ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କର ।



(ଚିତ୍ର 3.26)

ପ୍ରମାଣ: $\overleftrightarrow{XY} \parallel \overline{DE} \parallel \overline{BC}$;

$\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$, ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟକୁ ଯଥାକ୍ରମେ, A, D, B ଏବଂ A, E, C ରେ ଛେଦକରେ । $\overline{AB}$ ଛେଦକର ଛେଦିତାଂଶ (intercepts) ଦ୍ୱୟ $\overline{AD}$ ଓ $\overline{BD}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ । (ଦତ୍ତ)
ଅର୍ଥାତ୍ AD = BD ।

ଉପପାଦ୍ୟ 32 ଅନୁଯାୟୀ ଅନ୍ୟଏକ ଛେଦକ $\overline{AC}$ ର ଛେଦିତାଂଶ ଦ୍ୱୟ $\overline{AE}$ ଓ $\overline{EC}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ହେବ । ଅର୍ଥାତ AE = EC $\Rightarrow$ E, $\overline{AC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ । (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁଶୀଳନୀ- 3(c)

(କ) ବିଭାଗ

1. ନିମ୍ନ ଚିତ୍ରରେ $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3 \parallel L_4$, $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{PS}$ ଓ AB=BC=CD

(a) ଶୂନ୍ୟ ସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର।

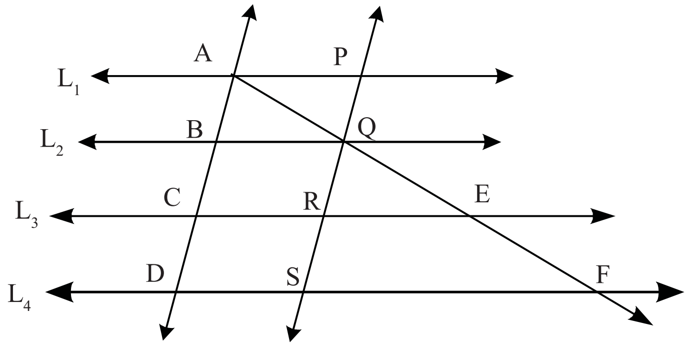
(i) AQ = ... = ...

(ii) PQ = $\frac{1}{3}$ (...)

(iii) EF = $\frac{1}{3}$ (...)

(iv) BQ = $\frac{1}{2}$ (...)

(v) RF = $\frac{1}{2}$ (....)



ଚିତ୍ର 3.27

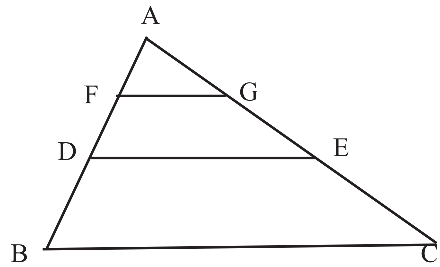
(b) ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତି ମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଭୁଲ ଓ ଠିକ୍ ଉକ୍ତି ଚିହ୍ନାଅ।

(i) AQ = $\frac{1}{2}$ AE, (ii) BQ = $\frac{1}{2}$ DF,

(iii) AF =2AQ, (iv) AP = DS,

(v) RE = $\frac{1}{2}$ SF, (vi) 3QE = AF

2. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 3.28 ରେ $\overline{FG} \parallel \overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ଏବଂ $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ D, $\overline{AD}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ F ହେଲେ, ନିମ୍ନ ଅନୁପାତଗୁଡ଼ିକୁ ସ୍ଥିର କର।



(ଚିତ୍ର 3.28)

(i) AG:GE (ii) AG:GC (iii) GE:EC (iv) AG:AC (v) GE:AC (vi) EC:AC

3. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର।

(a) ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର ବାହୁ ମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁକୁ କ୍ରମାନ୍ୱୟରେ ଯୋଗକଲେ, ଉତ୍ପନ୍ନ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଟି.... ହେବ।

(b) ଗୋଟିଏ ଆୟତଚିତ୍ରର ବାହୁମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁକୁ କ୍ରମାନ୍ୱୟରେ ଯୋଗକଲେ, ଉତ୍ପନ୍ନ ଚତୁର୍ଭୁଜଟି... ହେବ।

(c) ଗୋଟିଏ ବର୍ଗଚିତ୍ରର ବାହୁମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁକୁ କ୍ରମାନ୍ୱୟରେ ଯୋଗକଲେ, ଉତ୍ପନ୍ନ ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ...... ହେବ।

(d) କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମକୋଣରେ ଛେଦ କରୁଥିବା ଚତୁର୍ଭୁଜର ବାହୁମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁକୁ କ୍ରମାନ୍ୱୟରେ ଯୋଗକଲେ, ଉତ୍ପନ୍ନ ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ...... ହେବ।

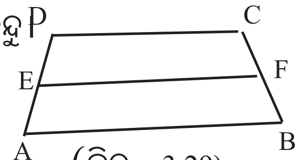
(e) ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ବାହୁମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ କୁ କ୍ରମାନ୍ୱୟରେ ଯୋଗକଲେ, ଉତ୍ପନ୍ନ ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ..... ହେବ।

(ଖ) ବିଭାଗ

4. ଏକ ସମବାହୁ Δ ABCରେ ବାହୁମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ D, E, ଓ F ହେଲେ, ଦର୍ଶାଅଯେ, ΔDEF ସମବାହୁ।

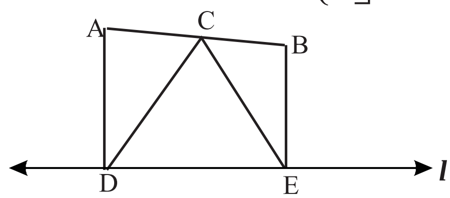
5. ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକୁ ଯୋଗକଲେ, ଯେଉଁ ଚାରିଗୋଟି ତ୍ରିଭୁଜ ଉତ୍ପନ୍ନ ହୁଏ, ସେମାନେ ସର୍ବସମ।

6. ଚିତ୍ର 3.29ରେ ABCD ଏକ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍। $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$, E, $\overline{AD}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ। $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$ ହେଲେ, ଦର୍ଶାଅଯେ, F, $\overline{BC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ।



(ଚିତ୍ର 3.29)

7. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 3.30ରେ $\overline{AD} \perp l$ ଏବଂ $\overline{BE} \perp l$, C, $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ହେଲେ CD = CE ।



(ଚିତ୍ର 3.30)

(ଗ) ବିଭାଗ

8. Δ ABC ରେ M ଓ N $\overline{AB}$ ବାହୁକୁ ସମତ୍ରିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି। $\overline{MP}$ ଓ $\overline{NQ}$ ପ୍ରତ୍ୟେକେ $\overline{BC}$ ସହ ସମାନ୍ତର ଏବଂ ସେମାନେ $\overline{AC}$ କୁ ଯଥାକ୍ରମେ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରନ୍ତି। ପ୍ରମାଣକରଯେ, P ଏବଂ Q, $\overline{AC}$ କୁ ସମତ୍ରିଖଣ୍ଡ କରିବେ।

9. Δ ABC ରେ M, P ଓ Q ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଏବଂ $\overline{PQ}$ ଓ $\overline{AM}$ ର ଛେଦବିନ୍ଦୁ R । ପ୍ରମାଣ କରଯେ, AR = RM, PR = RQ

10. ABCD ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରରେ X ଓ Y ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AD}$ ଓ $\overline{BC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ। $\overline{CX}$ ଓ $\overline{AY}$, $\overline{BD}$ କୁ ଯଥାକ୍ରମେ P ଓ Q ରେ ଛେଦକଲେ ପ୍ରମାଣ କରଯେ, DP = PQ = QB ।

11. Δ ABC ରେ $\overline{AM}$ ମଧ୍ୟମାର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ R । $\overrightarrow{BR}$ ଓ $\overline{AC}$ ପରସ୍ପରକୁ S ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଥିଲେ, ପ୍ରମାଣ କରଯେ, AS = $\frac{1}{3}$ AC

12. ABCD ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରରେ $\overline{BC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ P । $\overrightarrow{DP}$ ଓ $\overrightarrow{AB}$ ପରସ୍ପରକୁ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକଲେ ପ୍ରମାଣ କରଯେ, AQ = 2AB ।

13. Δ ABC ରେ $\overline{CM}$, $\overline{AB}$ କୁ M ବିନ୍ଦୁରେ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ଓ $\overline{BQ}$, $\overline{CM}$ କୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ। Q, $\overline{AC}$ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, AQ = 2QC

14. ପ୍ରମାଣକର ଯେ, ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର ଦୁଇ ଅସମାନ୍ତର ବାହୁର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟକୁ ଯୋଗକରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡ, ସମାନ୍ତର ବାହୁମାନଙ୍କ ସହ ସମାନ୍ତର ଏବଂ ଏହାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ସମାନ୍ତର ବାହୁମାନଙ୍କ ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟିର ଅର୍ଦ୍ଧେକ।

15. Δ ABC ରେ $\angle$B ସମକୋଣ। $\overline{AC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ P ହେଲେ ଦର୍ଶାଅଯେ, PA = PB = PC ।

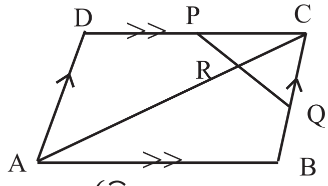
16. ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ କୁ ଯୋଗକରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡ, ସମାନ୍ତର ବାହୁମାନଙ୍କ ସହ ସମାନ୍ତର ଏବଂ ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନ୍ତର ର ଅର୍ଦ୍ଧେକ।

17. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, କୌଣସି ଚତୁର୍ଭୁଜର ବାହୁମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଗୁଡ଼ିକୁ ପର୍ଯ୍ୟାୟକ୍ରମେ ଯୋଗକଲେ, ଉତ୍ପନ୍ନ ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର।

18. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, ଆୟତଚିତ୍ରର ବାହୁମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକୁ ପର୍ଯ୍ୟାୟକ୍ରମେ ଯୋଗକଲେ, ଉତ୍ପନ୍ନ ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଏକ ରମ୍ବସ ହେବ ।

19. ପ୍ରମାଣକର ଯେ, ବର୍ଗଚିତ୍ରର ବାହୁମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକୁ ପର୍ଯ୍ୟାୟକ୍ରମେ ଯୋଗକଲେ, ଉତ୍ପନ୍ନ ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ବର୍ଗଚିତ୍ର ହେବ।

20. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 3.31 ରେ P ଓ Q ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{CD}$ ଓ $\overline{CB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{PQ}$, $\overline{AC}$ କର୍ଣ୍ଣକୁ R ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଥିଲେ, ଦର୍ଶାଅଯେ, 4CR = AC ।



(ଚିତ୍ର 3.31)

ଚତୁର୍ଥ ଅଧ୍ୟାୟ

କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

(AREAS)

4.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ସରଳରୈଖିକ ଆବଦ୍ଧକ୍ଷେତ୍ର ଓ ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସଂପର୍କରେ ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି। ମାତ୍ର ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଅବସ୍ଥାରେ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସରଳରୈଖିକ କ୍ଷେତ୍ରମାନଙ୍କର କ୍ଷେତ୍ରଫଳଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରେ ସଂପର୍କ ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା, ଏ ଅଧ୍ୟାୟର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ। ତୁମେମାନେ ଜାଣିଛ ଯେ, ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଥାଏ । କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଏକ ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଯାହା କ୍ଷେତ୍ର (region) ସହ ଜଡ଼ିତ। ତୁମେ ମଧ୍ୟ ଜାଣିଛ, ସରଳରୈଖିକ ଚିତ୍ର ଏବଂ ଏହାର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶର ସଂଯୋଗରେ ସରଳରୈଖିକ କ୍ଷେତ୍ରର ସୃଷ୍ଟି (ଯେପରି ତ୍ରିଭୁଜ ଓ ତାହାର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶର ସଂଯୋଗରେ ତ୍ରିଭୁଜାକାର କ୍ଷେତ୍ରର ସୃଷ୍ଟି।)

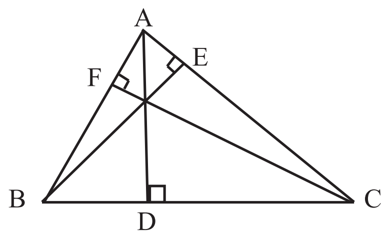
4.2 ତ୍ରିଭୁଜ ଏବଂ ସାମାନ୍ତରିକକ୍ଷେତ୍ରର ଉଚ୍ଚତା (Height of a Triangle and a parallelogram):

(a) ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତା

ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଯେକୌଣସି ବାହୁକୁ ଭୂମି ନେଇ ଏହାର ବିପରୀତ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଭୂମି ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କଲେ, ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ **ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତା** କୁହାଯାଏ।

(ଚିତ୍ର 4.1) ରେ Δ ABC ର ତିନୋଟି ଉଚ୍ଚତା ଥାଏ। $\overline{BC}$ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ $\overline{AD}$; $\overline{AC}$ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ $\overline{BE}$ ଏବଂ $\overline{AB}$ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ $\overline{CF}$ ।

Δ ABC ର ଉଚ୍ଚତାତ୍ରୟ AD, BE ଏବଂ CF



(ଚିତ୍ର 4.1)

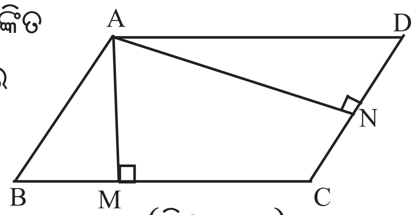
(b) ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ଉଚ୍ଚତା

କୌଣସି ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ଯେକୌଣସି ବାହୁକୁ ଭୂମି ମନେକରି ଏହାର ବିପରୀତ ବାହୁର ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁରୁ ଏହି ଭୂମି ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ **ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ଉଚ୍ଚତା** କୁହାଯାଏ।

ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଭୂମି $\overline{BC}$ ଏବଂ ଏହାପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଅନୁରୂପ ଲମ୍ବ $\overline{AM}$ । ସେହିପରି ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ଭୂମି $\overline{CD}$ ଏବଂ ଏହାପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଅନୁରୂପ ଲମ୍ବ $\overline{AN}$ ।

ତେଣୁ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ଦୁଇଟି ଉଚ୍ଚତା ଅଛି।

ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସେଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ AM ଏବଂ AN ।

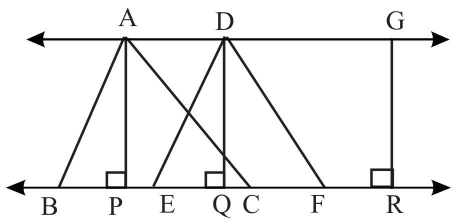


(ଚିତ୍ର 4.2)

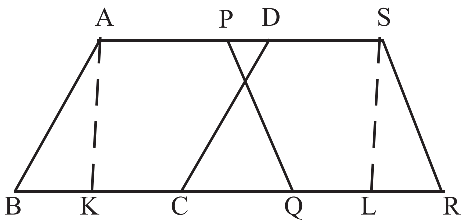
4.3 ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ କ୍ଷେତ୍ରମାନଙ୍କର ଉଚ୍ଚତା :

ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ କହିଲେ ବୁଝିବାକୁ ହେବ ଯେ, ସେମାନଙ୍କର ଭୂମି ଏକ ସରଳରେଖା ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେବା ସଂଗେ ସଂଗେ ଏମାନଙ୍କର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ଅପର ସରଳରେଖା ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେବ ।

ସେହିପରି ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରମାନ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ କହିଲେ ବୁଝିବାକୁ ହେବ ଯେ, ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଉପରେ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ର ଗୁଡ଼ିକର ଗୋଟିଏ ଲେଖାଏଁ ବାହୁ ଏବଂ ଅପର ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା ଉପରେ କ୍ଷେତ୍ର ଗୁଡ଼ିକର ବିପରୀତ ବାହୁଗୁଡ଼ିକ ଅବସ୍ଥିତ ହେବ ।



(ଚିତ୍ର 4.3)



(ଚିତ୍ର 4.4)

ଲକ୍ଷ୍ୟକର (ଚିତ୍ର 4.3) $\overleftrightarrow{AG}$ ଓ $\overleftrightarrow{BR}$ ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା ମଧ୍ୟରେ Δ ABC ଓ Δ DEF ଦ୍ୱୟ ଅବସ୍ଥାନ କରୁଛନ୍ତି ; କାରଣ ଏହାର ଭୂମି $\overline{BC}$ ଓ $\overline{EF}$, $\overleftrightarrow{BR}$ ଉପରେ ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁ A ଓ D $\overleftrightarrow{AG}$ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ । AP ଓ DQ ଯଥାକ୍ରମେ Δ ABC ଓ Δ DEF ଦ୍ୱୟର ଉଚ୍ଚତା। APQD ଏକ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ହେତୁ AP = DQ

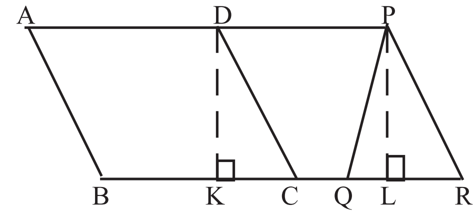
ଚିତ୍ର 4.4 ରେ $\overleftrightarrow{AS}$ ଓ $\overleftrightarrow{BR}$ ଦୁଇ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା ମଧ୍ୟରେ ABCD ଓ PQRS ସାମାନ୍ତରିକକ୍ଷେତ୍ର ଦ୍ୱୟ ଅବସ୍ଥିତ।

AK ଓ SL ଯଥାକ୍ରମେ, ABCD ଓ PQRS ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରଦ୍ୱୟର ଉଚ୍ଚତା।

AKLS ଏକ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ହେତୁ AK=SL

ଏଥିରୁ ଜଣାହେଲାଯେ, **ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ କ୍ଷେତ୍ର ମାନଙ୍କର ଉଚ୍ଚତା ପରସ୍ପର ସମାନ।**

ବିପରୀତ କ୍ରମେ, ଯେବେ **ଦୁଇ ବା ତତୋଽଧିକ ତ୍ରିଭୁଜ ବା ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ଉଚ୍ଚତା ସମାନ ହୁଏ ଏବଂ ସେମାନେ ଏକ ସରଳରେଖା ଉପରେ ଓ ତାହାର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ସେମାନେ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେବେ ।**



(ଚିତ୍ର 4.5)

ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ର ଏବଂ Δ PQR ଏକ ସରଳରେଖା $\overline{BR}$ ଉପରେ ଓ ତାହାର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏବଂ DK=PL ହେଲେ $\overleftrightarrow{AP} \parallel \overleftrightarrow{BR}$ ହେବ।

କାରଣ $\overline{DK}$ ଓ $\overline{PL}$ ପ୍ରତ୍ୟେକ $\overline{BR}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ; $\therefore$ $\overleftrightarrow{DK} \parallel \overleftrightarrow{PL}$ ଏବଂ DK = PL

$\therefore$ DKLP ଏକ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର । $\overleftrightarrow{DP} \parallel \overleftrightarrow{KL}$ ଅର୍ଥାତ୍ $\overleftrightarrow{AP} \parallel \overleftrightarrow{BR}$

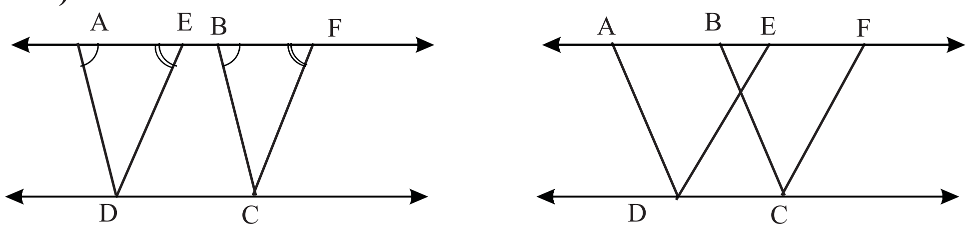
4.4 ସର୍ବସମ ସରଳରୈଖିକ କ୍ଷେତ୍ରମାନଙ୍କର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ :

ଦୁଇଟି ସରଳରୈଖିକ କ୍ଷେତ୍ର ସର୍ବସମ ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମାନ, କିନ୍ତୁ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମାନ ହେଲେ, ସେମାନେ ସର୍ବସମ ନହୋଇ ପାରନ୍ତି।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ : 8 ସେ.ମି. ଓ 3 ସେ.ମି. ଦୀର୍ଘ ସନ୍ନିହିତ ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ଏବଂ 4 ସେ.ମି. ଓ 6 ସେ.ମି. ଦୀର୍ଘ ସନ୍ନିହିତ ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 24 ବ.ସେ.ମି. ହେଲେ ହେଁ ସେମାନେ ସର୍ବସମ ନୁହଁନ୍ତି।

ଉପପାଦ୍ୟ - 33

ଏକା ଭୂମି ଉପରେ ଏବଂ ଏକା ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରଗୁଡ଼ିକର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମାନ । (Parallelograms on the same base and between the same parallels are equal in area.)



(i) (ଚିତ୍ର 4.6) (ii)

ଦତ୍ତ : ABCD ଓ EFCD ଦୁଇଟି ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ର ଏକା ଭୂମି $\overline{DC}$ ଓ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟ $\overleftrightarrow{AF}$ ଓ $\overleftrightarrow{DC}$ ମଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ର ABCD ଓ EFCD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମାନ ।

ପ୍ରମାଣ : $\because$ $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ ଓ $\overline{AF}$ ସେମାନଙ୍କର ଛେଦକ $\Rightarrow m\angle EAD = m\angle FBC$ (ଅନୁରୂପ)

ସେହିପରି $\because$ $\overleftrightarrow{ED} \parallel \overleftrightarrow{FC}$ ଏବଂ $\overline{AF}$ ସେମାନଙ୍କର ଛେଦକ $\Rightarrow m\angle AED = m\angle BFC$ (ଅନୁରୂପ)

Δ AED ଓ Δ BFC ଦ୍ୱୟରେ

$\because \begin{cases} m\angle EAD = m\angle FBC \\ m\angle AED = m\angle BFC \\ \text{ଏବଂ } AD = BC \text{ (ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ବିପରୀତ ବାହୁ)} \end{cases}$

$\therefore \Delta AED \cong \Delta BFC$ (କୋ-ବା-କୋ ଉପପାଦ୍ୟ)

$\therefore \Delta$ AEDର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = Δ BFC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

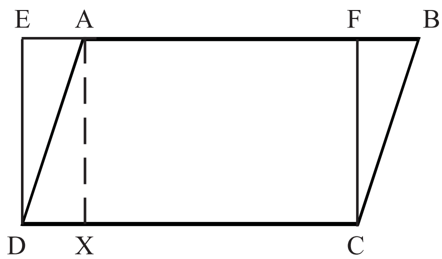
$\therefore$ ସମୁଦାୟ କ୍ଷେତ୍ର ADCF ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳରୁ ଏହି ଦୁଇ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳକୁ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ଭାବରେ ବିୟୋଗ କଲେ, ପାଇବା

ADCF ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ – Δ BFC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ADCF ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ – Δ AED ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$\Rightarrow$ ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = EFCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ (1) : ଏକା ଭୂମି ଉପରେ ଦଣ୍ଡାୟମାନ ଏବଂ ଏକା ଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରମାନଙ୍କର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମାନ । (ଏକା ଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ହେତୁ ସେମାନେ ଏକ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - (2) : ଏକା ଭୂମି ଉପରେ ଏବଂ ଏକା ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ର ଓ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମାନ ।



(ଚିତ୍ର 4.7)

ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ର ଓ EFCD ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ଏକା ଭୂମି $\overline{DC}$ ଉପରେ ଏବଂ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟ $\overleftrightarrow{EB}$ ଓ $\overleftrightarrow{DC}$ ମଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

EFCD ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ମଧ୍ୟ ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ର ।

$\therefore$ ପୂର୍ବ ଉପପାଦ୍ୟ ଅନୁଯାୟୀ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ର ABCD ଓ EFCD ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - (3)

କୌଣସି **ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ, ତାହାର ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଉଚ୍ଚତାର ଗୁଣଫଳ ସଂଗେ ସମାନ ।**

ପୂର୍ବ ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ଯେ,

ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = EFCD ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$\therefore$ ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= DC \times DE$

$= DC \times AX \quad (\because DE = AX)$

= ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ x ଉଚ୍ଚତା

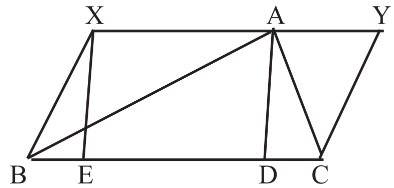
($\because \overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{DC}$ ଏବଂ $\overline{ED}$ ଓ $\overline{AX}$ ଉଭୟେ $\overline{DC}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - (4)

ସମାନ ସମାନ ଭୂମି ଏବଂ ଏକା ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରଗୁଡ଼ିକର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମାନ। ($\because$ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ଭୂମି x ଉଚ୍ଚତା)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - (5)

ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜ ଓ ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ର ଏକା ଭୂମି ଉପରେ ଏବଂ ଏକା ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ (ଅର୍ଥାତ୍ ଏକ ଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ) ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ, ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ହେବ।



(ଚିତ୍ର 4.8)

$\overline{BC}$ ପ୍ରତି $\overline{AD}$ ଓ $\overline{XE}$ ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର ।

Δ ABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ BC . AD

ଏବଂ ସାମାନ୍ତରିକ XBCY ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = BC.XE

କିନ୍ତୁ $\overleftrightarrow{XY} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ $\therefore$ XE = AD

$\therefore \Delta$ ABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ BC. XE = $\frac{1}{2}$ (ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ର XBCYର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ)

ବି:ଦ୍ର : ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ (2) ରୁ ଜାଣିଛେ, ଏକା ଭୂମି ଉପରେ ଏବଂ ଏକା ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ର ଓ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମାନ ।

ତେଣୁ ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 5 ରୁ ପାଇବା ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜ ଏବଂ ଗୋଟିଏ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ଏକା ଭୂମି ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏବଂ ଏକ ଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ହେବ ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 34

ଏକା ଭୂମି ଉପରେ ଏବଂ ଏକା ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ ତ୍ରିଭୁଜଗୁଡ଼ିକର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମାନ।

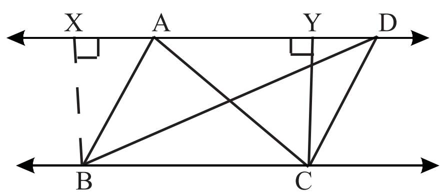
(Triangles on the same base and between the same parallels are equal in area.)

ଦତ୍ତ : Δ ABC ଓ Δ DBC ଦ୍ୱୟ ଏକା ଭୂମି $\overline{BC}$ ଉପରେ ଏବଂ ଏକା ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା $\overleftrightarrow{AD}$ ଓ $\overleftrightarrow{BC}$ ମଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : Δ ABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = Δ DBC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

ଅଙ୍କନ : $\overline{BC}$ ର B ଓ C ବିନ୍ଦୁରେ ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{BX}$ ଓ $\overline{CY}$ ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର।

ପ୍ରମାଣ : $\overline{XB}$ ଓ $\overline{YC}$ ଉଭୟେ $\overline{BC}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେତୁ XBCY ଏକ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ।



(ଚିତ୍ର 4.9)

Δ ABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \frac{1}{2}$ (ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର XBCY ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ)

ଏବଂ Δ DBC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \frac{1}{2}$ (ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର XBCY ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ)

(ଏକା ଭୂମି ଉପରେ ଏବଂ ଏକା ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେତୁ)

$\therefore$ Δ ABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \Delta$ DBC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : ସମାନ ସମାନ ଭୂମି ଉପରେ ଏବଂ ଏକା ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ ଅର୍ଥାତ୍ ସମାନ ଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜଗୁଡ଼ିକର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମାନ ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 35

ସମାନ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜ ମାନଙ୍କର ଭୂମି ସମାନ ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କର ଅନୁରୂପ ଉଚ୍ଚତା ସମାନ।

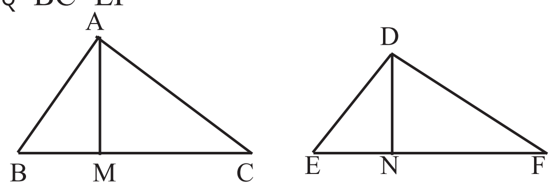
(Triangles with equal areas and equal bases have equal corresponding altitudes)

ଦତ୍ତ : Δ ABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \Delta$ DEF ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

ଦତ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟ ସମାନ ସମାନ ଭୂମି ବିଶିଷ୍ଟ ଅର୍ଥାତ୍ BC=EF

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟର ଉଚ୍ଚତା ସମାନ।

ଅଙ୍କନ : A ଓ D ବିନ୍ଦୁରୁ ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{BC}$ ଓ $\overline{EF}$ ପ୍ରତି $\overline{AM}$ ଓ $\overline{DN}$ ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର ।



(ଚିତ୍ର 4.10)

ପ୍ରମାଣ : AM ଓ DN ଯଥାକ୍ରମେ Δ ABC ଓ Δ DEF ର ଉଚ୍ଚତା। ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟରେ BC=EF

$\therefore \Delta$ ABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \frac{1}{2}$ BC . AM

ଏବଂ Δ DEF ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \frac{1}{2}$ EF . DN

କିନ୍ତୁ Δ ABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \Delta$ DEF ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$\Rightarrow \frac{1}{2}$ BC . AM $= \frac{1}{2}$ EF . DN $\Rightarrow$ AM = DN ($\because$ BC = EF)

ଅର୍ଥାତ୍ Δ ABC ଓ Δ DEF ର ଉଚ୍ଚତାଦ୍ୱୟ ସମାନ । (ପ୍ରମାଣିତ)

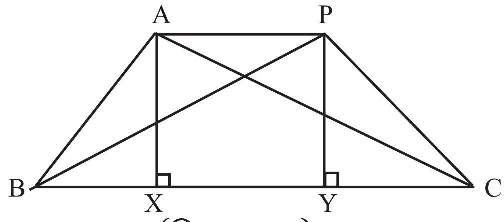
ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜ ମାନଙ୍କର ଉଚ୍ଚତା ସମାନ ହେଲେ ସେମାନଙ୍କର ଭୂମିମାନ ସମାନ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ହେବ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 36

ଏକା ଭୂମି ଉପରେ ଏବଂ ତାହାର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ସମାନ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜ ମାନ ଏକା ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ।

(If triangles of equal area situated on the same base and the same side of it then they lie between same parallels)

ଦତ୍ତ : ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ΔABC ଓ ΔPBC ଦ୍ୱୟ ଏକା ଭୂମି $\overline{BC}$ ଉପରେ ଏବଂ ତାହାର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ।



(ଚିତ୍ର 4.11)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\overleftrightarrow{AP} \parallel \overleftrightarrow{BC}$

ଅଙ୍କନ : A ଓ P ବିନ୍ଦୁରୁ $\overline{BC}$ ପ୍ରତି ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AX}$ ଓ $\overline{PY}$ ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର।

ପ୍ରମାଣ : $\overline{AX}$ ଓ $\overline{PY}$ ଯଥାକ୍ରମେ ΔABC ଓ ΔPBC ର ଉଚ୍ଚତା ଏବଂ $\overline{BC}$ ଉଭୟର ସାଧାରଣ ଭୂମି।

$\therefore$ ΔABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ BC.AX ଏବଂ ΔPBC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ BC . PY

କିନ୍ତୁ Δ ABC ଓ Δ PBC ଦ୍ୱୟ ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ

$\therefore \frac{1}{2} BC.\ AX = \frac{1}{2} BC.PY \Rightarrow AX = PY$

ପୁନଶ୍ଚ $\overline{AX}$ ଓ $\overline{PY}$ ଉଭୟେ $\overline{BC}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ $\Rightarrow \overleftrightarrow{AX} \parallel \overleftrightarrow{PY}$

$\because$ $\overline{AX}$ ଓ $\overline{PY}$ ସମାନ୍ତର ଏବଂ ସମଦୈର୍ଘ୍ୟବିଶିଷ୍ଟ । ତେଣୁ $\overleftrightarrow{AP} \parallel \overleftrightarrow{XY}$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{AP} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

4.5 କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେକ ସିଦ୍ଧାନ୍ତ :

1. ତ୍ରିଭୁଜ ଓ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ର (ବା ସେହିପରି କ୍ଷେତ୍ର - ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର, ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ର, ରମ୍ବସ) ମାନଙ୍କର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ, ସେମାନଙ୍କର ଭୂମି (ଗୋଟିଏ ବାହୁ) ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା (ସେହି ବାହୁର ବିପରୀତ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ) ଉପରେ ନିର୍ଭର କରେ ।

2. ଏହି କ୍ଷେତ୍ରମାନଙ୍କରେ ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ଉଚ୍ଚତା ଓ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ମଧ୍ୟରୁ ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ଏକା ବା ସମାନ ହେଲେ, ତୃତୀୟଟି ଏକା ବା ସମାନ ହେବ ।

3. ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ ବା ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ର ଏକା ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେଲେ ସେମାନଙ୍କର ଉଚ୍ଚତା ସମାନ ଏବଂ ବିପରୀତ କ୍ରମେ, ସେମାନଙ୍କର ଉଚ୍ଚତା ସମାନ ହେଲେ ଏବଂ ସେମାନେ ଏକ ଭୂମିର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିଲେ ସେମାନେ ଏକା ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା ମଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେବେ ।

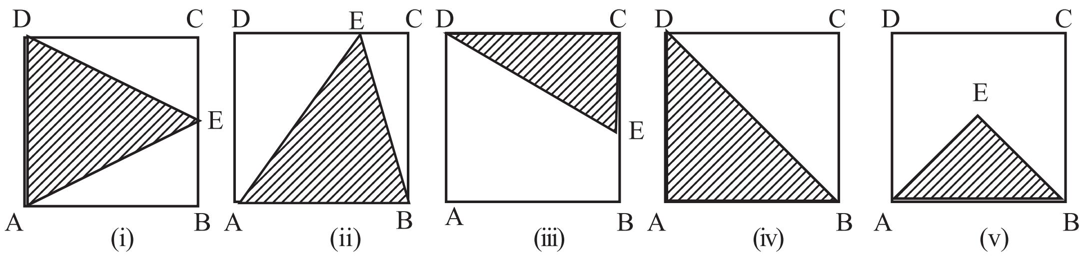
4. ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜ ଓ ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକକ୍ଷେତ୍ର (ବା ଆୟତ କ୍ଷେତ୍ର) ଏକା ଭୂମି (ବା ସମାନ ଭୂମି) ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏବଂ ଏକା (ବା ସମାନ) ଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ହେଲେ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ର (ବା ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର) ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଅର୍ଦ୍ଧେକ ହେବ ।

5. ଏକା (ବା ସମାନ) ଭୂମି ଏବଂ ଏକା (ବା ସମାନ) ଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ର, ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର, ରମ୍ବସ ଓ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମାନ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4

(କ) - ବିଭାଗ

1. ତଳଲିଖିତ ଚିତ୍ର ଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଥିରେ ଚିତ୍ରିତ (Shaded) ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅଧା ?



(ଚିତ୍ର 4.12)

2. ଚିତ୍ର 4.13 ରେ ABCD ଓ DCEX ଦୁଇଟି ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ର, AB = CF; B ଓ X ବିନ୍ଦୁ A ଓ E ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ହେଲେ,

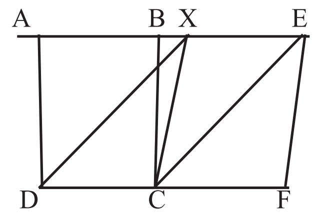
(i) ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁ ଗୁଡ଼ିକ ଠିକ୍ ଉକ୍ତି -

(a) ABCD ଓ DCEX କ୍ଷେତ୍ରଦ୍ୱୟ ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ।

(b) ABCD ଓ CFEX କ୍ଷେତ୍ରଦ୍ୱୟ ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ।

(c) DCEX ଓ EFCB କ୍ଷେତ୍ରଦ୍ୱୟ ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ।

(d) DCEX ଓ CFEX କ୍ଷେତ୍ରଦ୍ୱୟ ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ।



(ଚିତ୍ର 4.13)

(ii) ନିମ୍ନୋକ୍ତ ଉକ୍ତିମାନଙ୍କରେ ଭୁଲ ଥିଲେ ସଂଶୋଧନ କର।

(a) Δ XDC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ ABCD କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ।

(b) Δ XCE ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ BCFE କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ।

(c) Δ BCE ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ BCFE କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ।

(d) Δ CEX ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = Δ CEF ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ।

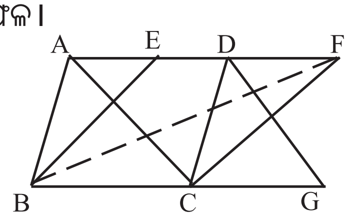
(e) ABCD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 2 x Δ CEF ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ।

(f) BCEF ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 2 x Δ DCX ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ।

3. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ

$\overleftrightarrow{AF} \parallel \overleftrightarrow{BG}$, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$,

$\overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{CF}$ ଓ $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{DG}$



(ଚିତ୍ର 4.14)

(a) ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର :

(i) ABCD କ୍ଷେତ୍ରସହ .... ଓ .... କ୍ଷେତ୍ରଦ୍ୱୟର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମାନ।

(ii) Δ ABC କ୍ଷେତ୍ରସହ ..... ଓ .... କ୍ଷେତ୍ରଦ୍ୱୟର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମାନ।

(b) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ :

(i) Δ ABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \frac{1}{2}$ (ACGD କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ)

(ii) Δ ACD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \frac{1}{2}$ (BCFE କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ)

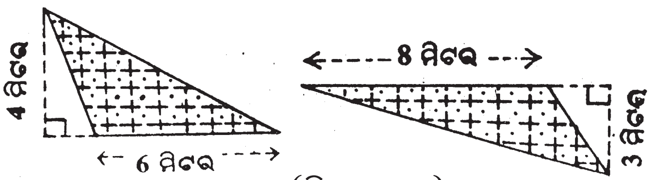
(c) E ଯଦି $\overline{AD}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ହୁଏ, ତେବେ ନିମ୍ନୋକ୍ତ କ୍ଷେତ୍ରମାନଙ୍କର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ମଧ୍ୟରେ ସଂପର୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

(i) Δ ABC ଓ Δ BCF (ii) Δ AEB ଓ ସାମାନ୍ତରିକ ABCD

(iii) Δ BCF ଓ BCFE କ୍ଷେତ୍ର, (iv) Δ DFC ଓ ସାମାନ୍ତରିକ BCFE ଏବଂ

(v) Δ ABE ଓ Δ DCF.

4. ଚିତ୍ର 4.15 (i) ଓ (ii) ରେ ଚିହ୍ନିତ ଅଂଶଦ୍ୱୟର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କାହିଁକି ସମାନ ?



(i) (ଚିତ୍ର 4.15) (ii)

(ଖ) - ବିଭାଗ

5. ଚିତ୍ର 4.16 ରେ ABCD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ର; $\overline{CX} \perp \overline{AD}$, $\overline{BY} \perp \overrightarrow{CA}$ ଏବଂ $\overline{CZ} \perp \overrightarrow{BA}$. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତିମାନଙ୍କରୁ କେଉଁ ଉକ୍ତି ଠିକ୍ ? କାରଣ ଦର୍ଶାଅ ।

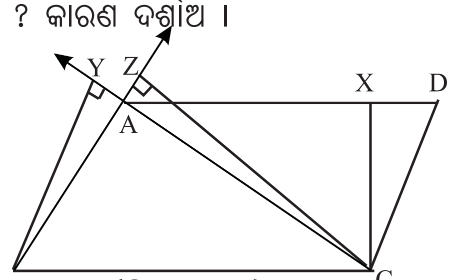
(i) AD.CX = BZ.CZ

(ii) AD.CX = CY.BY

(iii) BZ.CZ = AC.BY

(iv) BC.CX = AB.CZ

(v) AB.CZ = 2AC.BY



(ଚିତ୍ର 4.16)

6. Δ ABCରେ $\overline{BC}$ ଓ $\overline{AC}$ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 16 ସେ.ମି. ଓ 12 ସେ.ମି. । A ରୁ $\overline{BC}$ ଉପରେ ପତିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 9 ସେ:ମି:।

(i) Δ ABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସ୍ଥିର କର।

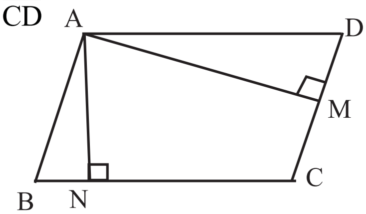
(ii) B ରୁ $\overline{AC}$ ଉପରେ ପତିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

7. ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରରେ $\overline{AN} \perp \overline{BC}$ ଏବଂ $\overline{AM} \perp \overline{CD}$ BC = 25 ସେ.ମି.; AN = 10 ସେ.ମି. CD = 15 ସେ.ମି. ହେଲେ

(i) AM କେତେ ହେବ ସ୍ଥିର କର ।

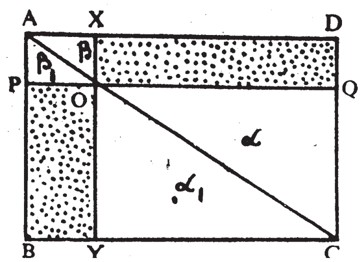
(ii) Δ ABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସ୍ଥିର କର ।

(iii) Δ ADC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସ୍ଥିର କର ।



(ଚିତ୍ର 4.17)

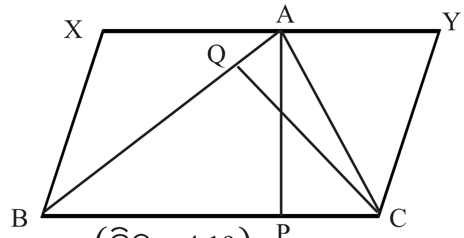
8. ଚିତ୍ର 4.18 ରେ ABCD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ର ।
$\overline{PQ} \parallel \overline{AD}$, $\overline{XY} \parallel \overline{AB}$
ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,
(i) POYB ଓ XOQD କ୍ଷେତ୍ରଦ୍ୱୟ ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ।
(ii) AXYB ଓ APQD କ୍ଷେତ୍ରଦ୍ୱୟ ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ।
(iii) PBCQ ଓ XYCD କ୍ଷେତ୍ରଦ୍ୱୟ ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ।



(ଚିତ୍ର 4.18)

9. ଦତ୍ତ ମାନ ଅନୁଯାୟୀ ନିମ୍ନଲିଖିତ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରଗୁଡ଼ିକର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର- ଯାହାର,
(i) ଉଚ୍ଚତା 5 ସେ.ମି. ଓ ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 10 ସେ.ମି.,
(ii) ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 18 ମି. ଓ ବିପରୀତ ସମାନ୍ତର ବାହୁଠାରୁ ତାହାର ଦୂରତା 7 ସେ:ମି:।
(iii) ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 120 ଡେ:ମି: ଓ ତାହାର ବିପରୀତ ଏକ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ 22 ଡେ:ମି:।

10. ଚିତ୍ର 4.19 ରେ $\overline{AP} \perp \overline{BC}$, $\overline{CQ} \perp \overline{AB}$ ଏବଂ XBCY ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ର; ନିମ୍ନ ଦତ୍ତ ମାନ ଅନୁଯାୟୀ Δ ABC ଓ XBCY ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଏବଂ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, Δ ABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ, XBCY ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ।
(i) BC = 16 ସେ:ମି:, AP = 6 ସେ:ମି:
(ii) AB = 12 ସେ:ମି:, CQ = 8 ସେ:ମି:।



(ଚିତ୍ର 4.19)

(ଗ) - ବିଭାଗ

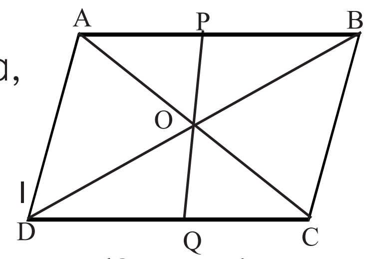
11. ଗୋଟିଏ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ର ଓ ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ ଏକା ଭୂମି ଉପରେ ଓ ତାହାର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ; ସେମାନଙ୍କର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମାନ ; ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, ସେମାନେ ଏକ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ।

12. Δ ABC ର $\overline{BC}$ ଉପରିସ୍ଥ D ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଯେପରିକି BD = $\frac{1}{2}$DC ।
ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, Δ ABD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{3}$ x Δ ABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ।

13. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ମଧ୍ୟମା ତାହାକୁ ଦୁଇ ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜରେ ବିଭକ୍ତ କରେ।

14. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣ କ୍ଷେତ୍ରଟିକୁ ଦୁଇଗୋଟି ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜରେ ବିଭକ୍ତ କରେ।

15. ଚିତ୍ର 4.20 ରେ ABCD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ର । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,
(i) ADQP ଓ BCQP କ୍ଷେତ୍ରଦ୍ୱୟ ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ।
(ii) ΔAODର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ=$\frac{1}{4}$ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ।



(ଚିତ୍ର 4.20)

16. ABCD ଏକ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍ ; ଏହାର $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$; ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,
(i) Δ ADC ଓ Δ BDC ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ।
(ii) Δ ADB ଓ Δ ACB ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ।

17. Δ ABC ର E ଓ F ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ।
(i) ଦର୍ଶାଅଯେ, EBCF ଏକ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍ ।
(ii) Δ ABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 50 ବ.ସେ.ମି. ହେଲେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ, EBCF ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 37.5 ବ.ସେ.ମି. ।

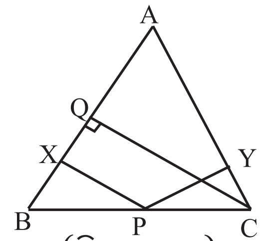
18. Δ ABC ର E ଓ F ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ। $\overline{CE}$ ଓ $\overline{BF}$ ର ଛେଦବିନ୍ଦୁ O ହେଲେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ, Δ OBCର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = AEOF ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ।

19. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରକୁ ଚାରିଗୋଟି ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜରେ ପରିଣତ କରେ ।

20. କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଉପପାଦ୍ୟ ପ୍ରୟୋଗ କରି ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,
(i) ତ୍ରିଭୁଜର କୌଣସି ଦୁଇ ବାହୁର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ସରଳରେଖା ତୃତୀୟ ବାହୁ ସଂଗେ ସମାନ୍ତର।
(ii) ଟ୍ରାପିଜିଅମର ଅସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ସରଳରେଖା ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟ ସହିତ ସମାନ୍ତର।

21. P, ABCD ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,
Δ ABP ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + Δ CDP ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{4}$ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

22. ଚିତ୍ର 4.21 ରେ ଥିବା Δ ABC ରେ AB = AC;
$\overline{BC}$ ଉପରିସ୍ଥ P କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ।
$\overline{PX} \perp \overline{AB}$, $\overline{PY} \perp \overline{AC}$ ଓ
$\overline{CQ} \perp \overline{AB}$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, PX + PY = CQ



(ଚିତ୍ର 4.21)

23. ΔABC ସମବାହୁ; O ଏହାର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ; $\overline{OX}$, $\overline{OY}$ ଓ $\overline{OZ}$ ଯଥାକ୍ରମେ Δର ବାହୁମାନଙ୍କ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ; ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, OX + OY + OZ = ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତା ।

24. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ, ଏହାର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଗୁଣଫଳର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ।

25. Δ ABC ର $\overline{AD}$ ମଧ୍ୟମା ଉପରେ X ଯେ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, Δ ABX ଓ Δ ACX ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ।

26. Δ ABC ର $\overline{BC}$ବାହୁ ଉପରେ P କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ; $\overline{AP}$ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ X ହେଲେ,
ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, Δ XBC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ (Δ ABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ) ।

27. ABCD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ର ; P ଓ Q ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{DC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ।
ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, PBQD କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅଧା।

28. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଗୁଡ଼ିକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡ ତ୍ରୟ ତ୍ରିଭୁଜଟିକୁ ଚାରୋଟି ସମାନ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜରେ ବିଭକ୍ତ କରନ୍ତି ।

29. ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି; AO = CO ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ Δ ABD ଓ Δ BCD ଦ୍ୱୟ ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ।

30. D, E ଓ F ଯଥାକ୍ରମେ Δ ABC ର ଓ ର ମଧ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ । ଦର୍ଶାଅ ଯେ, (i) FDCE ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ଏବଂ (ii) FDCE ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}\Delta$ ABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ।

■ ■ ■

ପଞ୍ଚମ ଅଧ୍ୟାୟ

ପରିମିତି

(MENSURATION)

5.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ବିଭିନ୍ନ ଆବଦ୍ଧକ୍ଷେତ୍ରମାନଙ୍କ ପରିମାପରୁ ପରିମିତି ବିଷୟଟିର ସୃଷ୍ଟି ହୋଇଥିଲା । ଗଣିତର ଏହା ଏକ ଅତି ପ୍ରାଚୀନ ବିଷୟ ଭାବେ ପରିଚିତ । ପରିମିତି ବିଷୟଟି ଜ୍ୟାମିତିକ ଧାରଣା ଓ ତଥ୍ୟ ଉପରେ ନିର୍ଭରଶୀଳ । ଏଠାରେ ବିଭିନ୍ନ ଆକାରର କ୍ଷେତ୍ରମାନଙ୍କ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଓ ପରିସୀମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ । ଏତଦ୍ ବ୍ୟତୀତ ଘନବସ୍ତୁମାନଙ୍କ ଘନଫଳ ଓ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ମଧ୍ୟ ନିରୂପଣ କରାଯାଇଥାଏ ।

ପରିମିତିରେ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାର ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କ ସମାଧାନ ବେଳେ ବୀଜଗାଣିତିକ ସମୀକରଣମାନ ଉତ୍ପନ୍ନ ହୋଇଥାନ୍ତି । ଏହି ସମୀକରଣ ଗୁଡିକ ଏକଘାତୀ ବା ଦ୍ୱିଘାତୀ ହୋଇପାରନ୍ତି ।

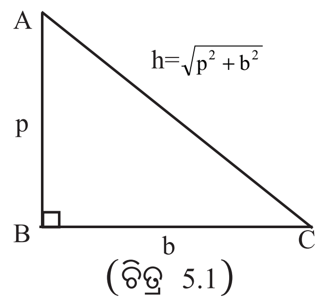
ଆମ ଆଲୋଚନା ଅନ୍ତର୍ଗତ ସମସ୍ତ କ୍ଷେତ୍ର ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ । ସୁତରାଂ ଏହି କ୍ଷେତ୍ରଗୁଡିକୁ ସାମତଳିକ କ୍ଷେତ୍ର କୁହାଯାଏ । ପୁନଶ୍ଚ କ୍ଷେତ୍ରମାନେ ସରଳରେଖାମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ ।

ଏଠାରେ ବାହୁ (ଭୁଜ) ସଂଖ୍ୟା $n \geq 3$ । $n = 3$ ହେଲେ କ୍ଷେତ୍ରଟି ତ୍ରିଭୁଜ ଓ $n = 4$ ହେଲେ କ୍ଷେତ୍ରଟି ଚତୁର୍ଭୁଜ ।

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟର ଶେଷ ଭାଗରେ ଆଲୋଚିତ ଘନବସ୍ତୁ ଆୟତଘନ ଏବଂ ସମଘନ, ଯାହାର ପୃଷ୍ଠତଳ ଓ ଘନଫଳ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି ।

ପରିମିତିରେ ଅନେକ ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନରେ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ଆବଶ୍ୟକତା ପଡିଥାଏ । ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିବାହୁଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସମ୍ବନ୍ଧଟି (ଯାହା ପିଥାଗୋରାସ୍ ଉପପାଦ୍ୟ ଭାବେ ପରିଚିତ) ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ହେଲା ।

''ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ବର୍ଗ ଏହାର ଅନ୍ୟ ଦୁଇବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ବର୍ଗର ସମଷ୍ଟି ସହିତ ସମାନ ।''



(ଚିତ୍ର 5.1)

ଚିତ୍ର 5.1 ରେ ΔABC ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ଏବଂ ଏହାର $\angle ABC$ କୋଣ ଏକ ସମକୋଣ । ସମକୋଣ ର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁକୁ କର୍ଣ୍ଣ (Hypotenuse) ଓ ଅନ୍ୟ ଦୁଇବାହୁ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{BC}$ ଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକୁ ଭୂମି (Base) ଓ ଅନ୍ୟଟିକୁ ଲମ୍ବ (Perpendicular) କୁହାଯାଏ । ତ୍ରିଭୁଜର $\angle A$ କୋଣ ପାଇଁ $\overline{BC}$ କୁ ଲମ୍ବ ଏବଂ $\overline{AB}$ କୁ ଭୂମି କୁହାଯାଏ ।

କିନ୍ତୁ $\angle C$ କୋଣ ପାଇଁ $\overline{AB}$ କୁ ଲମ୍ବ ଓ $\overline{BC}$ କୁ ଭୂମି କୁହାଯାଏ । ଅର୍ଥାତ୍ ସମକୋଣ ବ୍ୟତୀତ ଯେ କୌଣସି କୋଣପାଇଁ ତାହା ସହିତ ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁକୁ ଭୂମି ଓ କୋଣର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁକୁ ଲମ୍ବ କୁହାଯାଏ ।

ଲମ୍ବ, ଭୂମି ଓ କର୍ଣ୍ଣକୁ ଯଥାକ୍ରମେ p, b ଓ h ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ । ତେଣୁ ପିଥାଗୋରାସ୍‌ଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ ଅନୁସାରେ, $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ଅର୍ଥାତ୍ $\mathbf{h^2 = p^2 + b^2}$ ।

ଏହି ଉପପାଦ୍ୟର ବିପରୀତ କଥନ ମଧ୍ୟ ସତ୍ୟ । ଅର୍ଥାତ୍ **''କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ଏକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ବର୍ଗ ତାହାର ଅନ୍ୟ ଦୁଇ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ବର୍ଗର ସମଷ୍ଟି ସହ ସମାନ ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜଟି ସମକୋଣୀ ।''**

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ :

1. ଗୋଟିଏ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣ ଏକ ସମକୋଣ; ତେଣୁ ଏହାର ସମକୋଣ ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁଦ୍ୱୟ a ଏକକ ଓ b ଏକକ ହେଲେ, **ପ୍ରତ୍ୟେକ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ =** $\sqrt{a^2+b^2}$ ଏକକ

2. ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ର ମଧ୍ୟ ଗୋଟିଏ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ଓ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ । ଏହାର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ a ଏକକ ହେଲେ, **ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ =** $\sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}.a = a\sqrt{2}$ ଏକକ

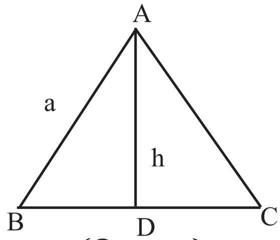
ଅର୍ଥାତ୍ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = $\sqrt{2}$ **x ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ**

3. ABC ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର AB = BC = CA = a ଏକକ ହେଲେ ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା AD = h ଏକକ ହେଲେ,

$$h^2 = AD^2 = AB^2 - BD^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$\therefore \quad h = \frac{\sqrt{3}}{2}a \text{ ଏକକ}$$

ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତା= $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **x ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ**



(ଚିତ୍ର 5.2)

5.2 ସରଳରୈଖିକ କ୍ଷେତ୍ର ଓ ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ (Polygonal region and its area) :

ପରସ୍ପରର ଅନ୍ତର୍ଦେଶକୁ ଛେଦ କରୁ ନ ଥିବା ସସୀମ ସଂଖ୍ୟକ ତ୍ରିଭୁଜାକାର କ୍ଷେତ୍ରର ସଂଯୋଗକୁ ଏକ ବହୁଭୁଜାକାର ବା **ସରଳରୈଖିକ କ୍ଷେତ୍ର (Polygonal region and its area)** କୁହାଯାଏ । ସରଳରୈଖିକ କ୍ଷେତ୍ର ଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ ଅଂଶର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାର ଆବଶ୍ୟକତା ବ୍ୟବହାରିକ ଜୀବନରେ ବହୁଳ ଭାବେ ଉପଲବ୍ଧ । ସାଧାରଣ ଭାବରେ ଏହା ଏକ ଜଟିଳ ସମସ୍ୟା । ତେଣୁ ଏ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟଟିକୁ ଗ୍ରହଣ କରାଯାଇଛି । ସୁବିଧା ପାଇଁ ତ୍ରିଭୁଜାକାର (ଚତୁର୍ଭୁଜାକାର) କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳକୁ ତ୍ରିଭୁଜ (ଚତୁର୍ଭୁଜ)ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।

କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ (Area Postulates) :

(a) ଗୋଟିଏ ସରଳରୈଖିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ।

(b) ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଆବଦ୍ଧକ୍ଷେତ୍ର (ତ୍ରିଭୁଜ)ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମାନ ।

(c) ଗୋଟିଏ ସରଳରୈଖିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଏହାକୁ ଗଠନ କରୁଥିବା ତ୍ରିଭୁଜ (ଯେଉଁଠାରେ କୌଣସି ଦୁଇଟି ପରସ୍ପରଚ୍ଛେଦୀ ନୁହଁନ୍ତି) ମାନଙ୍କ କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ସମଷ୍ଟି ସହ ସମାନ ।

କେତେକ ବିଶେଷାକାର ଚତୁର୍ଭୁଜ ଓ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ :

ଏଠାରେ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର, ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ର ଓ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ପାଇଁ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ସୂତ୍ର ଦିଆଗଲା । ଏଗୁଡ଼ିକୁ ମନେରଖିବା ଆବଶ୍ୟକ । କାରଣ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କ ସମାଧାନ ପାଇଁ ଏଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରୟୋଗ କରାଯିବ ।

(i) ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ a ଏକକ ଓ ପ୍ରସ୍ଥ b ଏକକ ହେଲେ,

ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ଦୈର୍ଘ୍ୟ x ପ୍ରସ୍ଥ= ab ବର୍ଗ ଏକକ

(ii) ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ a ଏକକ ହେଲେ,

ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = a^2 ବର୍ଗ ଏକକ ।

(iii) ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ b ଏକକ ଓ ଉଚ୍ଚତା h ଏକକ ହେଲେ,

ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}bh$ ବର୍ଗ ଏକକ ।

(iv) ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ= $\frac{1}{2}$ **(ସମକୋଣର ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଗୁଣଫଳ)**

(v) ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ a ଏକକ ଓ ଉଚ୍ଚତା h ଏକକ ହେଲେ, ଆମେ ଜାଣୁ $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ= $\frac{1}{2}a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ ବର୍ଗ ଏକକ

($\because$ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ× ଉଚ୍ଚତା)

$\therefore$ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ)^2 ବର୍ଗ ଏକକ ।

(vi) ଆମେ ଜାଣୁ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତା h ଏକକ ଓ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ a ଏକକ ହେଲେ,

$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ଏକକ ଅର୍ଥାତ୍ $a = \frac{2h}{\sqrt{3}}$ ଏକକ

$\therefore$ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2h}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}h^2$ ବର୍ଗ ଏକକ

($\because$ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{\sqrt{3}}{4} \times a^2$)

$\therefore$ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (ଉଚ୍ଚତା)^2 ବର୍ଗଏକକ ।

(vii) Δ ABC ଯେକୌଣସି ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ । ମନେକର BC = a ଏକକ,

AC = b ଏକକ ଓ AB = c ଏକକ । ତ୍ରିଭୁଜର ପରିସୀମା 2s = a + b + c ।

ΔABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ବର୍ଗ ଏକକ । ଏହାକୁ **Herronଙ୍କ ସୂତ୍ର** କୁହାଯାଏ । ଏହି ସୂତ୍ରଟି କିପରି ନିର୍ଣ୍ଣିତ ହୋଇଛି ତାହା ପରେ ଉଚ୍ଚ ମାଧ୍ୟମିକ ସ୍ତରରେ ପଢ଼ିବ । ବର୍ତ୍ତମାନ କେବଳ ଏହାକୁ ମନେରଖ ।

ଉଦାହରଣ - 1:

ଗୋଟିଏ ଆୟତାକାର କ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 80 ମିଟର ଓ ପ୍ରସ୍ଥ 45 ମି ହେଲେ ଏହାର ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ଦୈର୍ଘ୍ୟ × ପ୍ରସ୍ଥ = (80 × 45) = 3600 ବର୍ଗମିଟର ।

ମନେକର ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = x ମିଟର । ∴ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = x^2 ବର୍ଗମିଟର ।

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $x^2 = 3600 \Rightarrow x = \sqrt{3600} = \sqrt{60^2} = 60$ ।

∴ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 60 ମିଟର ।

ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = (ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ) × $\sqrt{2}$ ମିଟର = **$60\sqrt{2}$** ମିଟର ।

ଉଦାହରଣ - 2 :

ଗୋଟିଏ ଆୟତାକାର ପଡିଆର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ପ୍ରସ୍ଥ ଯଥାକ୍ରମେ 60 ମିଟର ଓ 48 ମିଟର । ଏହାର ଭିତର ଧାରକୁ ଲାଗି ଚାରିପାଖରେ 4 ମିଟର ଓସାର ରାସ୍ତାରେ ଘାସ ବିଛାଇବାକୁ ଏକ ବର୍ଗମିଟରକୁ 3 ଟଙ୍କା 50 ପଇସା ହିସାବରେ କେତେ ଖର୍ଚ୍ଚ ହେବ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ABCD ଗୋଟିଏ ଆୟତାକାର ପଡିଆ; ଏହାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ AB =60ମି ଓ ପ୍ରସ୍ଥ BC= 48ମି । ଏହି କ୍ଷେତ୍ରର ଭିତର ଧାରକୁ ଲାଗି 4 ମିଟର । ପ୍ରସ୍ଥ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ରାସ୍ତା ଅଛି ।

∴ PQ = (60 − 2 × 4) ମିଟର = (60 – 8) ମି.= 52 ମିଟର ।

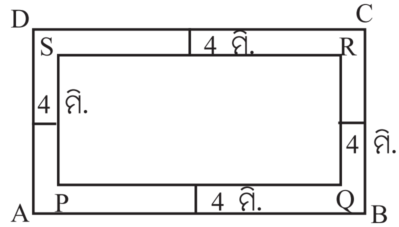
QR = (48 – 2 × 4) ମି = (48 –8) ମି = 40 ମିଟର ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ABCD ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

= (60 × 48) ବର୍ଗ.ମି = 2880 ବର୍ଗମିଟର ।

ପୁନଶ୍ଚ PQRS ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

= (52 × 40) ବର୍ଗ.ମି = 2080 ବର୍ଗମିଟର ।



(ଚିତ୍ର 5.3)

∴ ରାସ୍ତାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ABCD ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ − PQRS ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

= 800 ବର୍ଗମିଟର ।

ପ୍ରତି ବର୍ଗମିଟର ପାଇଁ 3 ଟଙ୍କା 50 ପଇସା ଖର୍ଚ୍ଚ ହେଉଥିଲେ 800 ବର୍ଗମିଟର ପାଇଁ ଖର୍ଚ୍ଚ

= 3 ଟଙ୍କା 50 ପଇସା × 800 = ($\frac{7}{2}$ × 800) ଟଙ୍କା = 2800 ଟଙ୍କା

∴ ରାସ୍ତାରେ ଘାସ ବିଛାଇବା ପାଇଁ 2800 ଟଙ୍କା ଖର୍ଚ୍ଚ ହେବ ।

ଉଦାହରଣ - 3 : ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ସମକୋଣ ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 24 ସେ.ମି ଓ 32 ସେ.ମି ହେଲେ ସମକୋଣରୁ କର୍ଣ୍ଣପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ସମକୋଣର ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 24 ସେ.ମି ଓ 32 ସେ.ମି ।

∴ ତ୍ରିଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = $\sqrt{24^2 + 32^2}$ ସେ.ମି = $\sqrt{1600}$ ସେ.ମି = 40 ସେ.ମି

ମନେକର ସମକୋଣରୁ କର୍ଣ୍ଣପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = x ସେ.ମି

ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ × କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ × ଉଚ୍ଚତା = $\frac{1}{2} \times 40 \times x = 20x$ ବର୍ଗ ସେ.ମି

ପୁନଶ୍ଚ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ × ସମକୋଣର ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଗୁଣଫଳ

= $\frac{1}{2} \times 24 \times 32$ ବର୍ଗ ସେ.ମି = 384 ବର୍ଗ ସେ.ମି

∴ $20x = 384 \Rightarrow x = \frac{384}{20} = 19.2$ ସେ.ମି (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 4: ଗୋଟିଏ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ 4 ସେ.ମି କମାଇଦେଲେ, ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $24\sqrt{3}$ ବର୍ଗ ସେ.ମି କମିଯାଏ । ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = a ସେ.ମି ।

$\therefore$ ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ ବର୍ଗ ସେ.ମି. ।

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $\frac{\sqrt{3}}{4}(a-4)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - 24\sqrt{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}(a-4)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 - 24 \text{ x } 4)$

$\Rightarrow (a-4)^2 = a^2 - 96 \Rightarrow a^2 - 8a + 16 = a^2 - 96 \Rightarrow 8a = 112 \Rightarrow a = 14$

$\therefore$ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 14 ସେ.ମି

ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତା = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ × ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 14 = 7\sqrt{3}$ ସେ.ମି (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 5 : ଗୋଟିଏ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁରୁ ତାହାର ବାହୁମାନଙ୍କ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ ତିନୋଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 6 ସେ.ମି, 7 ସେ.ମି ଓ 8 ସେ.ମି ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

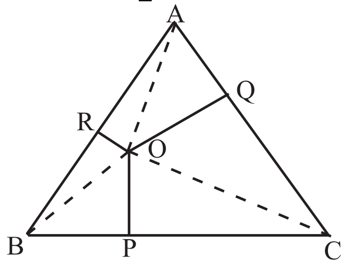
ସମାଧାନ : ମନେକର ABC ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜରେ O ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ । $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$ ଓ $\overline{OR}$ ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{BC}$, $\angle$ ଓ $\overline{AB}$ ବାହୁପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।

$\therefore$ OP = 6 ସେ.ମି, OQ = 7 ସେ.ମି, OR = 8 ସେ.ମି ।

ମନେକର ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = a ସେ.ମି. ।

$\overline{OA}$ ଓ $\overline{OB}$ ଓ $\overline{OC}$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ । ବର୍ତ୍ତମାନ OBC ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ BC . OP

$= \frac{1}{2} a \times 6$ ବର୍ଗ ସେ.ମି = 3a ବର୍ଗ ସେ.ମି ।



(ଚିତ୍ର 5.4)

Δ OCA ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ AC . OQ

$= \frac{1}{2} \times a \times 7$ ବର୍ଗ ସେ.ମି = $\frac{7a}{2}$ ବର୍ଗ ସେ.ମି

Δ OAB ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2} a \times 8 = \frac{1}{2} 8a = 4a$ ବର୍ଗ ସେ.ମି

Δ ABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = Δ OBC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + Δ OCA ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + Δ OAB ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$= (3a + \frac{7a}{2} + 4a)$ ବର୍ଗ ସେ.ମି = $\frac{21a}{2}$ ବର୍ଗ ସେ.ମି.

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{21a}{2}$ ବର୍ଗ ସେ.ମି. $\Rightarrow a = 14\sqrt{3}$

$\therefore$ ABC ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{21}{2}a = 147\sqrt{3}$ ବର୍ଗ ସେ.ମି (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 6 : ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁଗୁଡିକର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 15 ସେ.ମି., 28 ସେ.ମି. ଓ 41 ସେ.ମି. । ଏହାର ମଧ୍ୟମବାହୁ ଉପରେ ବିପରୀତ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ତ୍ରିଭୁଜର ଅର୍ଦ୍ଧ ପରିସୀମା = $s = \dfrac{15+28+41}{2} = \dfrac{84}{2} = 42$ ସେ.ମି

ବାହୁ ତ୍ରୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ a ସେ.ମି, b ସେ.ମି ଓ c ସେ.ମି ହେଲେ,

$a = 15,\ b = 28$ ଓ $c = 41$

ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{42(42-15)(42-28)(42-41)}$

$\sqrt{42 x 27 x 14 x 1} = \sqrt{14 x 3 x 3 x 9 x 14} = 14 \times 3 \times 3 = 126$ ବର୍ଗ ସେ.ମି. ।

ଏଠାରେ ମଧ୍ୟମ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 28 ସେ.ମି

ମନେକର ଏହାପ୍ରତି ବିପରୀତ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = x ସେ.ମି

ତେଣୁ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\dfrac{1}{2} \times 28 \times x = 14x$ ବର୍ଗ ସେ.ମି

$\therefore 14x = 126 \Rightarrow x = \dfrac{126}{14} = 9$ ସେ.ମି

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 9 ସେ.ମି (ଉତ୍ତର)

ପ୍ରଶ୍ନମାଳା - 5 (a)

1. ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କ ଉତ୍ତର ଦିଅ :

(i) Δ ABC ର ବାହୁତ୍ରୟ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 12 ସେ.ମି., 5 ସେ.ମି. ଓ 13 ସେ.ମି., ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କେତେ ?

(ii) Δ ABC ରେ ଉଚ୍ଚତା AD = 12 ସେ.ମି. ଓ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 96 ବର୍ଗ ସେ.ମି. । ଭୂମି BC କେତେ ?

(iii) ABC ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $25\sqrt{3}$ ବର୍ଗ ଏକକ । ଏହାର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କେତେ ?

(iv) ABC ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $25\sqrt{3}$ ବର୍ଗ ସେ.ମି. ହେଲେ ଏହାର ଉଚ୍ଚତା କେତେ ?

(v) ABC ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର କୌଣସି ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁରୁ ବାହୁମାନଙ୍କ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବତ୍ରୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 3 ସେ.ମି., 4 ସେ.ମି. ଓ 5 ସେ.ମି. ହେଲେ ତ୍ରିଭୁଜ ର ଉଚ୍ଚତା କେତେ ?

(vi) ଗୋଟିଏ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରରେ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କରିବାରୁ ଏହା ଦୁଇଗୋଟି ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରରେ ପରିଣତ ହେଲା । ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ଦୁଇ ସନ୍ନିହିତ ବାହୁମାନଙ୍କ ଅନୁପାତ କେତେ ?

(vii) ଗୋଟିଏ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ପ୍ରସ୍ଥକୁ 3 ଗୁଣ କଲେ, ଲବ୍ଧ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଦତ୍ତ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର କେତେ ଗୁଣ ?

(viii) ଗୋଟିଏ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ଗୋଟିଏ ବାହୁ 4 ମିଟର ଓ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 5 ମିଟର । କ୍ଷେତ୍ରଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କେତେ ?

(ix) ଗୋଟିଏ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ର ର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 4 ସେ.ମି. ହେଲେ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କେତେ ?

(x) ଗୋଟିଏ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ର ଓ ଗୋଟିଏ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ । ସେମାନଙ୍କ କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅନୁପାତ କେତେ ?

(xi) ଏକ ସମକୋଣୀ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମାନ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 4 ସେ.ମି. ହେଲେ ସମକୋଣରୁ କର୍ଣ୍ଣ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କେତେ ?

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ଦିଅ :

(i) ABCD ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରରେ BC – AB = 20 ମିଟର ଓ AB : BC = 4 : 5 । ABCD ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ପରିସୀମା କେତେ ?

(ii) ABCD ବର୍ଗ କ୍ଷେତ୍ରର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 4 ସେ.ମି. ବୃଦ୍ଧି କଲେ କ୍ଷେତ୍ରଫଳରେ 60 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ବୃଦ୍ଧି ହୁଏ । ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କେତେ ?

(iii) ଗୋଟିଏ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିସୀମା 18 ସେ.ମି. । ଭୂମି ଓ ଏକ ସମାନ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତ 8 : 5 ହେଲେ Δ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିରୂପଣ କର ।

3. ଗୋଟିଏ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଏକ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅଧା । ଏହାର ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଠାରୁ 12 ମିଟର ବେଶୀ ଏବଂ ଅନ୍ୟ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 12 ମିଟର କମ୍ ହେଲେ, ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରରେ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ଗୋଟିଏ ଘରର ଚାରିକାନ୍ଥର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 540 ବର୍ଗ ମିଟର ଏବଂ କାନ୍ଥର ଉଚ୍ଚତା 10 ମିଟର । ଘରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ପ୍ରସ୍ଥର ଅନୁପାତ 5 : 4 ହେଲେ, ଚଟାଣର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

5. ଗୋଟିଏ ବର୍ଗାକାର ଜମିର ବାହାର ଧାରକୁ ଲାଗି 2 ମିଟର ଚଉଡ଼ା ର ଏକ ରାସ୍ତା ଅଛି । ରାସ୍ତାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 416 ବର୍ଗ ମିଟର ହେଲେ ଜମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

6. ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 44 ମିଟର, ଏବଂ ଅନ୍ୟ ଦୁଇବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି 88 ମିଟର ହେଲେ ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

7. କୌଣସି ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ସମକୋଣ ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 45 ସେ.ମି. ଓ 60 ସେ.ମି. ହେଲେ ସମକୋଣରୁ କର୍ଣ୍ଣ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

8. ଗୋଟିଏ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 2 ମିଟର ବଢ଼ାଇଦେଲେ ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $6\sqrt{3}$ ବର୍ଗ ମିଟର ବଢ଼ିଯାଏ । ଏହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

9. ଗୋଟିଏ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 2 ସେ.ମି. କମାଇଦେଲେ ତାହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $16\sqrt{3}$ ବର୍ଗ ସେ.ମି. କମିଯାଏ । ଏହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

10. ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ସମକୋଣ ସଂଲଗ୍ନ ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 96 ସେ.ମି. ହେଲେ ଏହାର ସମକୋଣରୁ କର୍ଣ୍ଣପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

11. ଗୋଟିଏ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଗୋଟିଏ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର 3.5 ଗୁଣ । ବର୍ଗାକାର କ୍ଷେତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 20 ମିଟର ହେଲେ ତ୍ରିଭଜର ପରିସୀମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । $\left(\sqrt{3} \approx 1\frac{3}{4}\right)$

12. ଗୋଟିଏ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଏହାର ବାହୁମାନଙ୍କ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବତ୍ରୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 3 ସେ.ମି., 4 ସେ.ମି. ଓ 5 ସେ.ମି ହେଲେ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

13. ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିସୀମା 84 ସେ.ମି.; ଏହାର ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 30 ସେ.ମି. ଓ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 336 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ହେଲେ ଅନ୍ୟ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

14. ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 25 ସେ.ମି., 29 ସେ.ମି. ଓ 36 ସେ.ମି ହେଲେ, ଏହାର ବୃହତ୍ତମ ବାହୁ ଉପରେ ବିପରୀତ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

15. ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁମାନଙ୍କ ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତ 3 : 5 : 7 ଓ ପରିସୀମା 300 ମିଟର ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

16. ଗୋଟିଏ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିସୀମା 30 ସେ.ମି. ଓ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମାନ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 12 ସେ.ମି. ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

5.3 ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ର :

ଜ୍ୟାମିତିରେ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ର ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆମେ ବିସ୍ତୃତ ଆଲୋଚନା କରିଛେ ଏବଂ କ୍ଷେତ୍ର ଓ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଜ୍ୟାମିତିକ ତଥ୍ୟ ଗୁଡ଼ିକର ଯୁକ୍ତିମୂଳକ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇଛି । ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଆଲୋଚନା ସମୟରେ ସେଗୁଡ଼ିକ ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ । ସେଥିମଧ୍ୟରୁ କେତୋଟି ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ହେଲା ।

ଯେକୌଣସି ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର

(i) ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁଗୁଡ଼ିକ ପରସ୍ପର ସର୍ବସମ;

(ii) ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣମାନ ପରସ୍ପର ସର୍ବସମ;

(iii) କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି;

(iv) ପ୍ରତ୍ୟେକ କର୍ଣ୍ଣ ପ୍ରତି ବିପରୀତ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ପରସ୍ପର ସମାନ;

(v) ପ୍ରତ୍ୟେକ କର୍ଣ୍ଣ ସାମାନ୍ତରିକକ୍ଷେତ୍ରକୁ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ତ୍ରିଭୁଜରେ ବିଭକ୍ତ କରେ; ତେଣୁ ଉତ୍ପନ୍ନ ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମାନ ଏବଂ

(vi) କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ସାମାନ୍ତରିକକ୍ଷେତ୍ରକୁ ଯେଉଁ ଚାରୋଟି ତ୍ରିଭୁଜରେ ବିଭକ୍ତ କରନ୍ତି ସେମାନଙ୍କର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ପରସ୍ପର ସମାନ ।

ଉପରୋକ୍ତ ତଥ୍ୟଗୁଡ଼ିକ ସାହାଯ୍ୟରେ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ପରସ୍ଥିତିରେ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କିପରି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯିବ ତାହା ନିମ୍ନରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି ।

(A) ଭୂମି ଓ ଉଚ୍ଚତା ଦତ୍ତ ଥିଲେ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

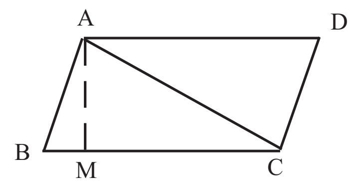
ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରରେ $\overline{BC}$ ଭୂମି ଏବଂ ଏହି ଭୂମି ପ୍ରତି A ବିନ୍ଦୁରୁ $\overline{AM}$ ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇଛି । ତେଣୁ AM ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ଉଚ୍ଚତା ଅଟେ । $\overline{AC}$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ । ବର୍ତ୍ତମାନ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରଟି ଦୁଇ ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜରେ ବିଭକ୍ତ ହେଲା ।

$\therefore$ ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

= Δ ABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଦୁଇଗୁଣ

= $2\times(\frac{1}{2}BC \times AM) = BC \times AM$ = ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ × ଉଚ୍ଚତା

$\therefore$ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ × ଉଚ୍ଚତା



ଚିତ୍ର 5.5

(B) ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଯେ କୌଣସି ସମ୍ମୁଖୀନ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁରୁ କର୍ଣ୍ଣପ୍ରତି ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଥିଲେ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରରେ $\overline{AC}$ କର୍ଣ୍ଣପ୍ରତି ସମ୍ମୁଖୀନ ଶୀର୍ଷ D ରୁ $\overline{DE}$ ଲମ୍ବ ଟଣାଯାଇଛି ।

$\because$ ପ୍ରତ୍ୟେକ କର୍ଣ୍ଣ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରକୁ ଦୁଇ ସର୍ବସମ ତ୍ରିଭୁଜରେ ବିଭକ୍ତ କରେ ।

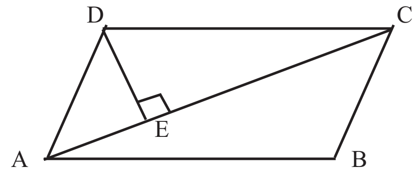
$\therefore$ ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 2 × ADC ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$= 2 \times \frac{1}{2}\ AC \times DE = AC \times DE$

= କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ × କର୍ଣ୍ଣପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ।

$\therefore$ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

= ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ × ସେହି କର୍ଣ୍ଣ ପ୍ରତି ଯେ କୌଣସି ସମ୍ମୁଖୀନ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ।



(ଚିତ୍ର 5.6)

(C) ଦୁଇଟି ସନ୍ନହିତ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଥିଲେ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ମନେକର ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ସନ୍ନିହିତ ବାହୁଦ୍ୱୟ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ଓ କର୍ଣ୍ଣ $\overline{AC}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଅଛି ।

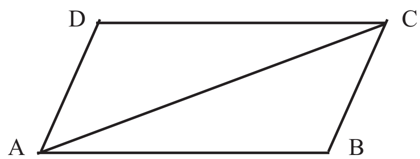
ମନେକର AB = c ଏକକ, BC = a ଏକକ ଓ AC = b ଏକକ ।

Δ ABC ର ଅର୍ଦ୍ଧପରିସୀମା $= s = \frac{a+b+c}{2}$

$\therefore$ ABCD ସମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

= 2 × ΔABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$= 2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ବର୍ଗ ଏକକ ।



(ଚିତ୍ର 5.7)

(D) କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଥିଲେ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ମନେକର ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ଏବଂ $\overline{AB}$ ବାହୁ ଦତ୍ତ ଅଛି । ମନେକର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ।

$\because$ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରକୁ ଚାରିଟି ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜ ବିଭକ୍ତ କରନ୍ତି ।

ତେଣୁ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 4 x Δ AOB ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ।

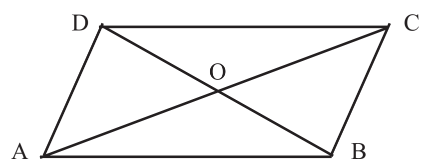
ମନେକର AC = d_1 ଏକକ, BD = d_2 ଏକକ ଓ AB = a ଏକକ ।

$\therefore AO = \frac{1}{2}AC = \frac{d_1}{2}$ ଏକକ ଏବଂ $BO = \frac{1}{2}BD = \frac{d_2}{2}$ ଏକକ ।

$\therefore$ Δ AOB ର ଅର୍ଦ୍ଧପରିସୀମା= $s = \dfrac{a+\frac{d_1}{2}+\frac{d_2}{2}}{2}$ ଏକକ ।

ତେଣୁ $\sqrt{s(s-a)(s-\frac{d_1}{2})(s-\frac{d_2}{2})}$ ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରି

Δ AOB ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇ ପାରିବ ।

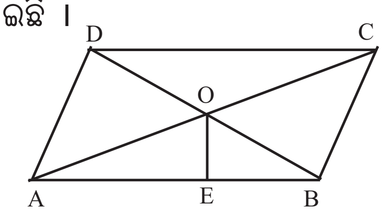


(ଚିତ୍ର 5.8)

$\therefore$ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = କ୍ଷେତ୍ରର ଦୁଇ କର୍ଣ୍ଣର୍ ଅର୍ଦ୍ଧେକ ଓ ଗୋଟିଏ ବାହୁ ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଚାରିଗୁଣ ।

(E) ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁରୁ ଉକ୍ତ ବାହୁ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଥିଲେ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରରେ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି; ଏବଂ O ବିନ୍ଦୁରୁ $\overline{AB}$ ବାହୁ ପ୍ରତି $\overline{OE}$ ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇଛି ।



(ଚିତ୍ର 5.9)

ମନେକର AB = a ଏକକ ଓ OE = p ଏକକ ।

$\therefore$ Δ AOB ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \frac{1}{2} \times$ ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $\times$ ଉଚ୍ଚତା

$= \frac{1}{2} \times a \times p$ ବର୍ଗଏକକ $= \frac{1}{2}ap$ ବର୍ଗ ଏକକ

$\therefore$ ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 4 $\times$ Δ AOB ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$= 4 \times \frac{1}{2}$ ap ବର୍ଗ ଏକକ = 2ap ବର୍ଗ ଏକକ ।

$\therefore$ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ଏହାର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଛେଦ ବିନ୍ଦୁରୁ ଏଥି ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଗୁଣଫଳର ଦୁଇଗୁଣ ।

ଉଦାହରଣ - 7

ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 4 ଡେସି.ମି. 5 ସେ.ମି. ଓ ଏହି କର୍ଣ୍ଣପ୍ରତି ସମ୍ମୁଖୀନ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 2 ଡେସି.ମି. 4 ସେ.ମି. ହେଲେ, କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 4 ଡେସି.ମି. 5 ସେ.ମି = 45 ସେ.ମି ।

ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 2 ଡେସି.ମି. 4 ସେ.ମି = 24 ସେ.ମି ।

କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ × ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = (45 × 24) ବର୍ଗ ସେ.ମି = 1080 ବର୍ଗ ସେ.ମି

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 1080 ବର୍ଗ ସେ.ମି ।

ଉଦାହରଣ - 8 :

ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 52 ସେ.ମି. ଓ 56 ସେ.ମି. ଏବଂ ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 60 ସେ.ମି. ହେଲେ, ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଓ ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱାରା ଗଠିତ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 52 ସେ.ମି., 56 ସେ.ମି. ଓ 60 ସେ.ମି. ।

ମନେକର a = 52 ସେ.ମି., b = 56 ସେ.ମି. ଓ c = 60 ସେ.ମି.

ତ୍ରିଭୁଜର ଅର୍ଦ୍ଧ ପରିସୀମା = $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{52+56+60}{2} = \frac{168}{2} = 84$ ସେ.ମି.

କର୍ଣ୍ଣ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରକୁ ଦୁଇଟି ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜରେ ବିଭକ୍ତ କରେ ।

$\therefore$ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 2 × ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$= 2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 2\sqrt{84(84-52)(84-56)(84-60)}$

$= 2\sqrt{84 x 32 x 28 x 24}$ ବର୍ଗ ସେ.ମି. $= 2\sqrt{12 x 7 x 16 x 2 x 7 x 4 x 24}$ ବର୍ଗ ସେ.ମି.

$= 2 \times 24 \times 7 \times 8 = 2688$ ବର୍ଗ ସେ.ମି.

ଯେହେତୁ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ଦୁଇଟି ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 52 ସେ.ମି. ଓ 56 ସେ.ମି.

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଉଚ୍ଚତା = $\frac{\text{କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\text{ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}} = \frac{2688}{52}$ ବା $\frac{2688}{56}$ ସେ.ମି.

ଅର୍ଥାତ୍ ଉଚ୍ଚତା $= 59\frac{5}{13}$ ସେ.ମି. ବା 48 ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

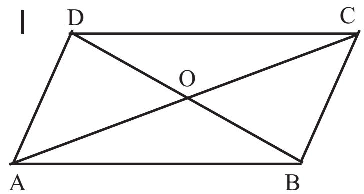
ଉଦାହରଣ - 9 :

ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 50 ସେ.ମି. ଓ 58 ସେ.ମି. ଏବଂ ଏହାର ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 36 ସେ.ମି. ହେଲେ, ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଓ ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରରେ AC = 58 ସେ.ମି., BD = 50 ସେ.ମି. ଏବଂ AB = 36 ସେ.ମି. ।

ମନେକର $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଛନ୍ତି ।



ଚିତ୍ର 5.10

ବର୍ତ୍ତମାନ AO = $\frac{1}{2}$ AC = $\frac{1}{2} x 58 = 29$ ସେ.ମି.

BO = $\frac{1}{2}$ BD = = $\frac{1}{2} x 50 = 25$ ସେ.ମି. ଏବଂ AB = 36 ସେ.ମି.

ମନେକର a = AO = 29 ସେ.ମି., b = BO = 25 ସେ.ମି. ଓ c = AB = 36 ସେ.ମି.

ΔAOB ର ଅର୍ଦ୍ଧ ପରିସୀମା = $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{29+25+36}{2} = 45$ ସେ.ମି.

= ΔAOB ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{45(45-29)(45-25)(45-36)}$

$= \sqrt{45 x 16 x 20 x 9}$ ବର୍ଗ ସେ.ମି. $= 360$ ବର୍ଗ ସେ.ମି.

ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 4 × ΔAOB ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 4 × 360 = 1440 ବର୍ଗ ସେ.ମି

ପୁନଶ୍ଚ ଉଚ୍ଚତା = $\frac{\text{କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\text{ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}} = \frac{1440}{36} = 40$ ସେ.ମି.

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 1440 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ଓ ଉଚ୍ଚତା 40 ସେ.ମି. । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 10 :

ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 13 ମିଟର ଏବଂ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 336 ବର୍ଗ ମି. । ଏହାର ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅନ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅପେକ୍ଷା 2 ମିଟର ଅଧିକ ହେଲେ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରରେ AB = 13 ମିଟର । ମନେକର $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ଏବଂ AC > BD (ଚିତ୍ର 5.10 ଦେଖ)

ମନେକର BD = 2x ମିଟର । $\therefore$ AC = (2x + 2) ମିଟର

ବର୍ତ୍ତମାନ AO = $\frac{1}{2}$ AC = $\frac{1}{2}$ (2x + 2) = (x + 1) ମିଟର

$BO = \frac{1}{2}\ BD = \frac{1}{2}\ (2x)$ ମି. = x ମି. ଏବଂ AB = 13 ମି.

$\therefore \Delta AOB$ ର ଅର୍ଦ୍ଧ ପରିସୀମା = $s = \dfrac{x+1+x+13}{2} = (x+7)$ ମି.

$\therefore \Delta AOB$ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{(x+7)\{(x+7)-(x+1)\}\{(x+7)-x\}(x+7-13)}$

$= \sqrt{(x+7)x6x7x(x-6)} = \sqrt{(x+7)(x-6)x42}$ ବର୍ଗ ମିଟର

$\therefore$ ସାମନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $4 \times \Delta AOB$ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$= 4 \times \sqrt{(x+7)(x-6)x42}$ ବର୍ଗ ମିଟର

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $4 \times \sqrt{(x+7)(x-6)x42} = 336 \Rightarrow \sqrt{(x+7)(x-6)x42} = 84$

$\Rightarrow (x+7)(x-6)\,42 = 84 \times 84 \Rightarrow (x+7)(x-6) = 84 \times 2 = 168$

$\Rightarrow x^2 + 7x - 6x - 42 = 168 \Rightarrow x^2 + x = 210 \Rightarrow x^2 + x - 210 = 0$

$\Rightarrow (x+15)(x-14) = 0$ $\therefore x = -15$ ବା $x = 14$

କିନ୍ତୁ $x = -15$ ଗ୍ରହଣୀୟ ନୁହେଁ । ସୁତରାଂ x = 14 ମିଟର

ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 2x ମିଟର = 2 × 14 = 28 ମିଟର ଏବଂ

ଅନ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = (2x + 2) ମିଟର = 28 + 2 = 30 ମିଟର ।

$\therefore$ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 28 ମିଟର ଓ 30 ମିଟର । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 11 :

ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକକ୍ଷେତ୍ରର ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅନ୍ୟ ଏକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅପେକ୍ଷା 2 ସେ.ମି ଅଧିକ ଏବଂ ବୃହତ୍ତର ବାହୁମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ବ୍ୟବଧାନ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟଠାରୁ 2 ସେ.ମି. କମ୍ । ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 140 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ହେଲେ, ସନ୍ନିହିତ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ କ୍ଷେତ୍ରର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ: ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରରେ A ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃହତ୍ତର ବାହୁ $\overline{BC}$ ପ୍ରତି $\overline{AE}$ ଲମ୍ବ । ମନେକର କ୍ଷୁଦ୍ରତର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = AB = x ସେ.ମି. । $\therefore$ ବୃହତ୍ତର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ BC = (x + 2) ସେ.ମି.

ବୃହତ୍ତର ବାହୁ $\overline{AD}$ ଓ $\overline{BC}$ ମଧ୍ୟରେ ବ୍ୟବଧାନ = AE = (x – 2) ସେ.ମି.

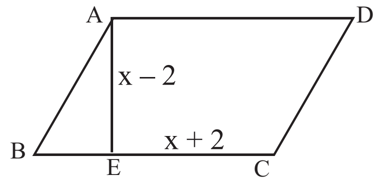
$\therefore$ ABCD ସାମାନ୍ତରିକକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ × ଉଚ୍ଚତା = BC × AE

= (x + 2) (x – 2) ବର୍ଗ ସେ.ମି. = $(x^2 - 4)$ ବର୍ଗ ସେ.ମି.

ଦତ୍ତ ଅଛି ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 140 ବର୍ଗ ସେ.ମି.

$\therefore x^2 - 4 = 140 \Rightarrow x^2 = 144 \Rightarrow x = \pm 12$

$\therefore$ x = 12 ସେ.ମି.



(ଚିତ୍ର 5.11)

$\therefore$ AB = 12 ସେ.ମି., BC = (x + 2) ସେ.ମି. = 14 ସେ.ମି. ଓ

ଉଚ୍ଚତା AE = (x – 2) ସେ.ମି.= 12 – 2 = 10 ସେ.ମି. । (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5 (b)

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କ ଉତ୍ତର ସଂକ୍ଷେପରେ ଦିଅ ।

   (i) ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 6 ସେ.ମି.ଓ ଉଚ୍ଚତା= 3 ସେ.ମି., ହେଲେ ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କେତେ ?

   (ii) ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 10 ସେ.ମି ଓ ଏହାର ସମ୍ମୁଖୀନ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁରୁ କର୍ଣ୍ଣପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 6 ସେ.ମି. ହେଲେ ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କେତେ ?

   (iii) ABCD ସାମନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରରେ $AB + BD + AD = 2s$ ଏକକ । $s(s - AB)(s - BD)(s - AD) = 64$ ହେଲେ, ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କେତେ ?

   (iv) ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 96 ବର୍ଗ ଏକକ ଓ ଏହାର ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 8 ଏକକ ହେଲେ, କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁରୁ ଭୂମିପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କେତେ ?

   (v) ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 144 ବର୍ଗ ଏକକ ଓ ଏହାର ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 24 ଏକକ ହେଲେ, କର୍ଣ୍ଣର ସମ୍ମୁଖୀନ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁରୁ କର୍ଣ୍ଣପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କେତେ ?

2. ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 2.5 ଡେସିମିଟର ଓ ଉଚ୍ଚତା 4.8 ଡେସିମିଟର ବିଶିଷ୍ଟ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. କୌଣସି ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 4 ଡେ.ମି. 6 ସେ.ମି. ଏବଂ ଏହି କର୍ଣ୍ଣପ୍ରତି ବିପରୀତ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 22 ସେ.ମି. ହେଲେ ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 50 ସେ.ମି. ଓ 58 ସେ.ମି.; ଏବଂ ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 36 ସେ.ମି. ହେଲେ, ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

5. ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 26 ମି. ଓ 28 ମି. ଏବଂ ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 30 ମି. ହେଲେ, ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

6. ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 24 ସେ.ମି. ଏବଂ ଏହି ବାହୁ ଉପରେ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁରୁ ପତିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 10 ସେ.ମି. ହେଲେ, କ୍ଷେତ୍ରଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

7. ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଉଚ୍ଚତାର ଅନୁପାତ 2:3 ଓ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 726 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ହେଲେ, ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

8. ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ଉଚ୍ଚତା ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟର $\frac{3}{4}$ ଅଂଶ ଏବଂ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 300 ବର୍ଗମିଟର । କ୍ଷେତ୍ରଟିର ଉଚ୍ଚତା ଓ ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

9. ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ତା'ର ଉଚ୍ଚତା ଅପେକ୍ଷା 4 ମିଟର ଅଧିକ । କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 285 ବର୍ଗମିଟର ହେଲେ, ଉଚ୍ଚତା ଓ ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

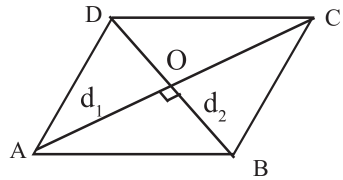
10. ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 420 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ଓ ଗୋଟିଏ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଏକ କର୍ଣ୍ଣ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 14 ସେ.ମି. ହେଲେ, କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

11. ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 25 ମିଟର, 29 ମି. ଓ 36 ମି. । ଏହି କର୍ଣ୍ଣପ୍ରତି ବିପରୀତ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

12. ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ, ଗୋଟିଏ 40 ସେ.ମି. କର୍ଣ୍ଣ ବିଶିଷ୍ଟ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସହ ସମାନ । ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 40 ସେ.ମି. ହେଲେ, ଏହାର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
13. ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 13 ମିଟର ଏବଂ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 336 ବର୍ଗମିଟର । ଏହାର ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅନ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅପେକ୍ଷା 2 ମିଟର ଅଧିକ ହେଲେ, କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
14. ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ସନ୍ନିହିତ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି 16 ସେ.ମି. ଓ ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 8 ସେ.ମି. । ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 48 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ହେଲେ, ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
15. ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନ୍ତର 8 ମିଟର ଓ ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 16 ମିଟର । ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 192 ବର୍ଗମିଟର ହେଲେ, ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
16. ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 10 ମିଟର ଓ ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 21 ମିଟର ଏବଂ ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 168 ବର୍ଗମିଟର । ମିଟରକୁ 12 ଟଙ୍କା ହିସାବରେ ଏହାର ଚାରିପାଖରେ ତାର ବାଡ ଦେବାକୁ କେତେ ଖର୍ଚ୍ଚ ଲାଗିବ ?

5.4 ରମ୍ବସ୍ (Rhombus)

ଯେଉଁ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ଚାରୋଟିଯାକ ବାହୁ ସର୍ବସମ, ତାହାକୁ ରମ୍ବସ୍ କୁହାଯାଏ । ତେଣୁ ସାମନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ସମସ୍ତ ସୂତ୍ର ରମ୍ବସ୍ ପାଇଁ ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ । ରମ୍ବସ୍ ସମ୍ବନ୍ଧରେ କେତେକ ଜ୍ୟାମିତିକ ତଥ୍ୟ ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ହେଲା ।



(ଚିତ୍ର 5.12)

(i) ରମ୍ବସ୍‌ର ଚାରିବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ।
(ii) ରମ୍ବସ୍‌ର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମକୋଣରେ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି ।
(iii) ରମ୍ବସ୍‌ର ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣ ଏହାକୁ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ତ୍ରିଭୁଜରେ ବିଭକ୍ତ କରେ ଓ ଏମାନଙ୍କ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମାନ ।
(iv) ରମ୍ବସ୍‌ର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ଦ୍ୱାରା ରମ୍ବସ୍‌ଟି ଚାରିଗୋଟି ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜରେ ବିଭକ୍ତ ହୋଇଥାଏ ।

5.4.1 ରମ୍ବସ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ :

(A) ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ (a) ଓ ଉଚ୍ଚତା (h) ଦତ୍ତ ଥିଲେ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ରମ୍ବସ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ × ଉଚ୍ଚତା = ah ବର୍ଗ ଏକକ ।

$\therefore$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = $\frac{\text{କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\text{ଉଚ୍ଚତା}}$ ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା = $\frac{\text{କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\text{ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}}$

(B) ରମ୍ବସ୍‌ର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ (d_1 ଏକକ ଓ d_2 ଏକକ) ଦତ୍ତ ଥିଲେ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ମନେକର ABCD ରମ୍ବସ୍‌ର କର୍ଣ୍ଣ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି (ଚିତ୍ର 5.12)। ଯେହେତୁ ରମ୍ବସ୍‌ର କର୍ଣ୍ଣ ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମକୋଣରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ତେଣୁ ରମ୍ବସ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 4 (Δ AOB ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ)

$= 4 \times \frac{1}{2} \times OA \times OB = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{d_1}{2} \times \frac{d_2}{2} = \frac{1}{2} d_1 d_2$ ବର୍ଗ ଏକକ ।

($AC = d_1$ ଏକକ ଓ $BD = d_2$ ଏକକ)

$\therefore$ ରମ୍ବସ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ x କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଗୁଣଫଳ

5.4.2 ରମ୍ବସ୍‌ର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଥିଲେ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

Δ AOB ରେ $m\angle AOB = 90^0$ $AB^2 = AO^2 + BO^2$ (ଚିତ୍ର 5.12)

$$(AO = \frac{1}{2}AC = \frac{d_1}{2} \text{ ଏବଂ } BO = \frac{1}{2}BD = \frac{d_2}{2})$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{(\tfrac{1}{2}d_1)^2 + (\tfrac{1}{2}d_2)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4}(d_1^2 + d_2^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \text{ ଏକକ}$$

$\therefore$ ରମ୍ବସ୍‌ର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = $\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}$ ବା $\frac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2}$ ଏକକ

ଉଦାହରଣ - 12 :

ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ୍‌ର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 64 ସେ.ମି. ଓ 48 ସେ.ମି. ହେଲେ, ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ, ପରିସୀମା ଓ ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ: କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ (କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଗୁଣଫଳ)= $\frac{1}{2}$ (64 x 48)ବର୍ଗ ସେ.ମି.= 1536 ବର୍ଗ ସେ.ମି.

ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = $\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}$

= $\sqrt{32^2 + 24^2}$ = $\sqrt{1024 + 576}$ = $\sqrt{1600}$ = 40 ସେ.ମି.

$\therefore$ ପରିସୀମା = 4 × ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 4 × 40 = 160 ସେ.ମି. ।

ଉଚ୍ଚତା = $\frac{\text{କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\text{ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}}$ = $\frac{1536}{40}$ = 38.4 ସେ.ମି.

$\therefore$ ରମ୍ବସର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 1536 ବର୍ଗ ସେ.ମି., ପରିସୀମା 160 ସେ.ମି. ଓ ଉଚ୍ଚତା 38.4 ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 13 :

ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ୍‌ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 50 ମିଟର । ଏହାର ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 60 ମିଟର ହେଲେ ରମ୍ବସର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଓ ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 50 ମିଟର, ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = d_1 = 60 ମିଟର

ମନେକର ଅନ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = d_2 = 2x ମିଟର ।

$\therefore$ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = $\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}$ = $\sqrt{\left(\frac{60}{2}\right)^2 + \left(\frac{2x}{2}\right)^2}$ = $\sqrt{30^2 + x^2}$

$\therefore 50 = \sqrt{30^2 + x^2} \Rightarrow 50^2 = 30^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 50^2 - 30^2 = 40^2$

$\Rightarrow x = 40$ $\therefore$ ଅନ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = d_2 = 2x = 2 x 40 = 80 ମିଟର

କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ (କର୍ଣ୍ଣ ଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଗୁଣଫଳ) = $\frac{1}{2}$ (80 x 60) = 2400 ବର୍ଗ ମିଟର ।

ଉଚ୍ଚତା = $\frac{\text{କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\text{ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}}$ = $\frac{2400}{50}$ = 48 ମିଟର । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 14 :

ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 13 ସେ.ମି. ଓ କର୍ଣ୍ଣ ଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତ 5 : 12 ହେଲେ ରମ୍ବସର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $(d_1) = 5x$ ସେ.ମି । ଅନ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ$(d_2) = 12x$ ସେ.ମି.

ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $= \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{5x}{2}\right)^2 + \left(\frac{12x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{169x^2}{4}} = \frac{13x}{2}$

କିନ୍ତୁ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 13 ସେ.ମି. $\Rightarrow \frac{13x}{2} = 13 \Rightarrow x = 2$ ସେ.ମି.

ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ$(d_1) = 5 \times 2 = 10$ ସେ.ମି., ଅନ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ$(d_2) = 12x = 12 \times 2 = 24$ ସେ.ମି.

$\therefore$ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \frac{1}{2} \times d_1 . d_2 = \frac{1}{2} \times 24 \times 10 = 120$ ବର୍ଗ ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 15 :

ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ୪64 ବର୍ଗ ସେ.ମି. । ଏହାର କର୍ଣ୍ଣ ଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତ 3 : 4 ହେଲେ, ଏହାର ପରିସୀମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $(d_1) = 3x$ ସେ.ମି. ଏବଂ ଅନ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ$(d_2)=4x$ ସେ.ମି.

$\therefore$ ରମ୍ବସର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \frac{1}{2} \times$(କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଗୁଣଫଳ)$= \frac{1}{2} \times 3x \times 4x$ ବ.ସେ.ମି.$= 6x^2$ ବର୍ଗ ସେ.ମି.

$\therefore$ ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $6x^2 = 864 \Rightarrow x^2 = 144 \Rightarrow x = 12$

ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $(d_1) = 12 \times 3 = 36$ ସେ.ମି., ଅନ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $(d_2) = 12 \times 4 = 48$ ସେ.ମି.

ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $= \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{36}{2}\right)^2 + \left(\frac{48}{2}\right)^2} = \sqrt{18^2 + 24^2}$

$= \sqrt{6^2(3^2 + 4^2)} = \sqrt{6^2 x 5^2} = 30$ ସେ.ମି.

ପରିସୀମା = 4 × ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 4 × 30 ସେ.ମି. = 120 ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 16 :

ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ୍ର ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅନ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଠାରୁ 34 ମିଟର ଅଧିକ । ରମ୍ବସର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 336 ବର୍ଗ ମିଟର ହେଲେ, ଏହାର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = x ମିଟର $\therefore$ ଅନ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = $(x + 34)$ ମିଟର

$\therefore$ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \frac{1}{2} \times$ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଗୁଣଫଳ $= \frac{1}{2} \times x\,(x + 34)$ ବର୍ଗ ମିଟର

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $\frac{1}{2} \times (x + 34) = 336$

$\Rightarrow x^2 + 34x = 672 \Rightarrow x^2 + 2 \times 17 \times x + 17^2 = 762 + 17^2$

$\Rightarrow (x + 17)^2 = 672 + 289 = 961 = 31^2 \Rightarrow x + 17 = 31 \Rightarrow x = 14$

$\therefore$ ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $(d_1) = 14$ ମିଟର, ଅନ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $(d_2) = 34 + 14 = 48$ ମିଟର

ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = $\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{14}{2}\right)^2 + \left(\frac{48}{2}\right)^2} = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$ ମିଟର

ଉଚ୍ଚତା = $\frac{\text{କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\text{ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}} = \frac{336}{25} = 13.44$ ମିଟର

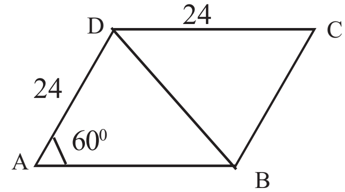
$\therefore$ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 25 ମି. ଓ ଉଚ୍ଚତା 13.44 ମି. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 17 :

ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସର ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ 60^0 ଏବଂ ଏହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 24 ସେ.ମି. ହେଲେ, ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ABCD ରମ୍ବସ୍‌ର AB = 24 ସେ.ମି. ଓ $m\angle BAD = 60^0$

$\therefore \Delta$ ABD ଓ Δ DBC ଦ୍ୱୟ ସମବାହୁ ।



ଚିତ୍ର 5.13

ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ABD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{\sqrt{3}}{4} \times$ (ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ)^2

$= \frac{\sqrt{3}}{4} (24)^2 = 144\sqrt{3}$ ବର୍ଗ ସେ.ମି.

ରମ୍ବସ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 2 × Δ ABD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 2 × $144\sqrt{3} = 288\sqrt{3}$ ବର୍ଗ ସେ.ମି (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5 (c)

1 ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କ ଉତ୍ତର ଦିଅ :

(i) ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 288 ବର୍ଗ ମିଟର ଏବଂ ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 18 ମିଟର ହେଲେ ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 196 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ଏବଂ ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 28 ସେ.ମି.ହେଲେ, ଅନ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iii) ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ୍‌ର ଦୁଇକର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 24 ମିଟର ଓ 10 ମିଟର ହେଲେ, ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iv) ABCD ରମ୍ବସ୍‌ର କର୍ଣ୍ଣ ଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ O ଏବଂ AO = 3 ସେ.ମି ଓ OB = 4 ସେ.ମି ହେଲେ ABCD ରମ୍ବସ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କେତେ ?

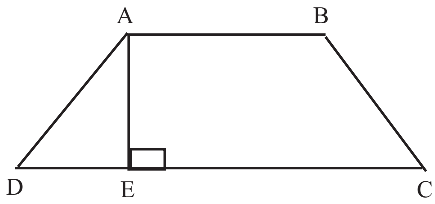
(v) ABCD ରମ୍ବସ୍‌ର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ O ଓ AO = 6 ସେ.ମି ଓ AB = 10 ସେ.ମି ହେଲେ, ରମ୍ବସ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କେତେ ?

2. ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ୍‌ର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 10 ସେ.ମି ଏବଂ ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 12 ସେ.ମି ହେଲେ, ରମ୍ବସ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ୍‌ର ପରିସୀମା 52 ମିଟର ଏବଂ ଏହାର ବୃହତ୍ତମ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 24 ମିଟର ହେଲେ, ଅନ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
4. ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 144 ବର୍ଗ ସେ.ମି ଏବଂ ଏହାର ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅନ୍ୟଟିର 2 ଗୁଣ ହେଲେ, କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
5. ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ୍‌ର ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 18 ସେ.ମି. ଏବଂ ବିପରୀତ ବାହୁଠାରୁ ଏହାର ଦୂରତା 14 ସେ.ମି. ହେଲେ, ରମ୍ବସ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
6. ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ୍‌ର ଏକ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅନ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟର 80 ପ୍ରତିଶତ (ଶତକଡା 80 ଭାଗ) ହେଲେ, ରମ୍ବସ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବୃହତ୍ତମ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ବର୍ଗର କେତେ ଗୁଣ ହେବ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
7. ଗୋଟିଏ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ର ଓ ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ୍ ଏକା ଭୂମି ଉପରେ ଦଣ୍ଡାୟମାନ । ତେବେ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ର ଓ ରମ୍ବସ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅନୁପାତ କେତେ ହେବ ନର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
8. ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 560 ବର୍ଗ ମିଟର । ଏହାର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଉଚ୍ଚତାର ଅନୁପାତ 7 : 5 ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
9. ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ୍‌ର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 4 ଡେସିମିଟର 8 ସେଣ୍ଟିମିଟର ଓ 6 ଡେସିମିଟର 4 ସେଣ୍ଟି ମିଟର ହେଲେ, ରମ୍ବସ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଓ ପରିସୀମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
10. ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 1320 ବର୍ଗ ମିଟର । ଏହାର ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 22 ମିଟର ହେଲେ, ଅନ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
11. ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 3456 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ଓ ଏହାର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଅନୁପାତ 3 : 4 ହେଲେ, ରମ୍ବସ୍‌ର ପରିସୀମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
12. ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 867 ବର୍ଗ ମିଟର ଏବଂ ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅନ୍ୟଟିର $\frac{2}{3}$ ହେଲେ, କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
13. ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 240 ବର୍ଗ ସେ.ମି । ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅନ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟଠାରୁ 14 ସେ.ମି. ବେଶୀ ହେଲେ, ରମ୍ବସ୍‌ର ପରିସୀମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
14. ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ୍‌ର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 13 ମିଟର ଓ ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 24 ମିଟର । ଏହାର ଅନ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ରମ୍ବସ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
15. ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ୍‌ର ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 17 ସେ.ମି. ଏବଂ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତ 8 : 15 ହେଲେ, ରମ୍ବସ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
16. ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ୍‌ର ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 15 ମିଟର ଏବଂ ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅନ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟଠାରୁ 6 ମିଟର ବେଶୀ । ରମ୍ବସ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
17. 720 ବର୍ଗ ମିଟର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ରମ୍ବସ୍‌ର ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 41 ମିଟର ହେଲେ, କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
18. ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ୍‌ର ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ 60^0 ଓ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 8 ମିଟର ହେଲେ, ଏହାର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

5.5 ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍ (Trapezium) :

ସଂଜ୍ଞା : **ଯେଉଁ ଚତୁର୍ଭୁଜର କେବଳ ଦୁଇଟି ବିପରୀତ ବାହୁ ସମାନ୍ତର (ଅନ୍ୟ ବିପରୀତ ବାହୁ ଯୋଡ଼ା ଅସମାନ୍ତର) ତାହାକୁ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍ କୁହାଯାଏ ।** ABCD ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ରେ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ । A ବିନ୍ଦୁରୁ $\overline{CD}$ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ $\overline{AE}$ ହେଲେ, $\overline{AE}$ କୁ ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ବ୍ୟବଧାନ କୁହାଯାଏ । ଉକ୍ତ ବ୍ୟବଧାନକୁ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା କୁହାଯାଏ ।



(ଚିତ୍ର 5.14)

ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍ ସମ୍ବନ୍ଧରେ କେତେକ ଜ୍ୟାମିତିକ ତଥ୍ୟ ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ହେଲା ଓ ଏହି ତଥ୍ୟମାନ ଆମ ଆଲୋଚନା ପାଇଁ ଆବଶ୍ୟକ :

(a) ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର ଅସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟ ବିନ୍ଦୁକୁ ଯୋଗକରୁଥିବା ସରଳରେଖା ଖଣ୍ଡ (i) ସମାନ୍ତର ବାହୁମାନଙ୍କ ସହ ସମାନ୍ତର ଓ ସମାନ୍ତର ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟିର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ଏବଂ (ii) ଉଚ୍ଚତାକୁ ଦୁଇ ସମାନ ଅଂଶରେ ବିଭକ୍ତ କରେ ।

(b) ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର ଅସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ହେଲେ (i) ଏହାର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ଓ (ii) ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମାନ୍ତର ବାହୁ ସଂଲଗ୍ନ କୋଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ।

(c) ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର ଦୁଇ କର୍ଣ୍ଣର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତରଫଳର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ସହ ସମାନ ।

ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିରୂପଣ :

(A) ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଉଚ୍ଚତା ଦତ୍ତ ଥିଲେ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ABCD ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ବାହୁଦ୍ୱୟ ସମାନ୍ତର । A ରୁ $\overrightarrow{CD}$ ପ୍ରତି $\overline{AE}$ ଓ C ରୁ $\overline{AB}$ ପ୍ରତି $\overline{CF}$ ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର ।

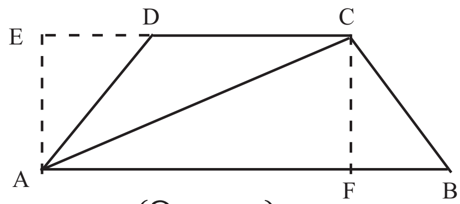
ତେଣୁ AE ବା CF ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା ଏବଂ $\overline{AC}$ ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣ । ମନେକର AB = a ଏକକ, CD = b ଏକକ ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା AE = CF = h ଏକକ ।

ଅତଏବ ABCD ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ।

= Δ ABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + Δ ACD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$= \frac{1}{2}\ AB \times CF + \frac{1}{2}\ CD \times AE$

$= \frac{1}{2}\ ah + \frac{1}{2}\ bh = \frac{1}{2}\ (a+b) \times h$



(ଚିତ୍ର 5.15)

$\therefore$ **ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟିର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ଓ ଉଚ୍ଚତାର ଗୁଣଫଳ**

(B) ଅସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଉଚ୍ଚତା ଦତ୍ତ ଥିଲେ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ଅସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁକୁ ଯୋଗକରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟିର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ।

∴ **ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ଅସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁକୁ ଯୋଗକରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଉଚ୍ଚତାର ଗୁଣଫଳ**

ଉଦାହରଣ - 18 :

ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 34 ସେ.ମି ଓ 26 ସେ.ମି ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା 14 ସେ.ମି ହେଲେ, ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ନିର୍ଣ୍ଣେୟ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}\times$(ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି) × ଉଚ୍ଚତା

$= \frac{1}{2}\times(34+26)\times 14$ ବର୍ଗ ସେ.ମି. = (30×14) ବର୍ଗ ସେ.ମି.= 420 ବର୍ଗ ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 19 :

ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର ଅସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁକୁ ଯୋଗକରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 42 ମିଟର ଏବଂ ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 924 ବର୍ଗ ମିଟର ହେଲେ ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା = h ମିଟର ।

ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ଅସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁକୁ ଯୋଗକରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ × ଉଚ୍ଚତା

= 42h ବର୍ଗ ମିଟର $\Rightarrow 42h = 924 \Rightarrow h = \frac{924}{42} = 22$

∴ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଉଚ୍ଚତା = 22 ମିଟର (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 20 :

ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 320 ବର୍ଗ ସେ.ମି. । ଏହାର ଗୋଟିଏ ସମାନ୍ତର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 17 ସେ.ମି. ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା ଓ ଅନ୍ୟ ସମାନ୍ତର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତ 4 : 3 ହେଲେ ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ a ଓ b ସେ.ମି. ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା h ସେ.ମି,

ଦତ୍ତ ଅଛି a = 17 ସେ.ମି. ।

ମନେକର ଅନ୍ୟ ସମାନ୍ତର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 3x ସେ.ମି. ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା = 4x ସେ.ମି.

କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}\times h\,(a+b) = \frac{1}{2}\times 4x\,(17+3x) = 2x\,(17+3x)$ ବର୍ଗ ସେ.ମି.

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $2x\,(3x+17) = 320 \Rightarrow x\,(3x+17) = 160$

$\Rightarrow 3x^2 + 17x = 160 \Rightarrow 3x^2 + 17x - 160 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 15x + 32x - 160 = 0$

$\Rightarrow 3x\,(x-5) + 32\,(x-5) = 0 \Rightarrow (x-5)\,(3x+32) = 0$

$\Rightarrow x - 5 = 0$ ବା $3x + 32 = 0 \Rightarrow x = 5$ ବା $x = \frac{-32}{3}$ ∴ $x = 5$

∴ ଉଚ୍ଚତା = $4x = 4 \times 5 = 20$ ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 21 :

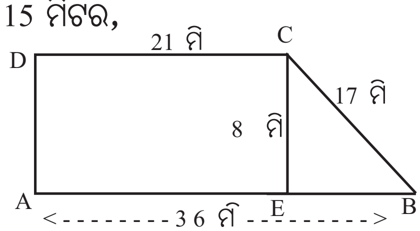
ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 36 ମିଟର ଓ 21 ମିଟର । ଅସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଏବଂ ଅନ୍ୟ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 17 ମିଟର ହେଲେ, ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ABCD ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ସମାନ୍ତର ଏବଂ $\overline{AD}$, $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।

ମନେକର AB = 36 ମିଟର ଓ CD = 21 ମିଟର । C ବିନ୍ଦୁରୁ $\overline{AB}$ ପ୍ରତି $\overline{CE}$ ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର ।

ବର୍ତ୍ତମାନ AE CD ଏକ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ।

$\therefore$ AE = CD = 21 ମିଟର   ତେଣୁ EB = AB – AE = 36 – 21= 15 ମିଟର,



(ଚିତ୍ର 5.16)

BCE ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ CE = $\sqrt{(BC^2 - EB^2)}$ ମିଟର

= $\sqrt{17^2 - 15^2}$ = 8 ମିଟର

ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା = 8 ମିଟର

ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ × ଉଚ୍ଚତା × ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି

= $\frac{1}{2} \times 8 \times (36 + 21) = 4 \times 57 = 228$ ବର୍ଗ ମିଟର ।   (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 22 :

ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 54 ସେ.ମି. ଓ 40 ସେ.ମି. । ଯଦି ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅସମାନ୍ତର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 25 ସେ.ମି. ହୁଏ , ତେବେ ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ABCD ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଦୁଇ ସମାନ୍ତର ବାହୁ ଏବଂ $\overline{AD}$ ଓ $\overline{BC}$ ଅସମାନ୍ତର ବାହୁ ।

ମନେକର AB = 54 ସେ.ମି., CD = 40 ସେ.ମି. ଓ AD = BC = 25 ସେ.ମି.

ମନେକର $\overline{CE}, \overline{AD}$ ସହ ସମାନ୍ତର ଏବଂ $\overline{CF}, \overline{BE}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ । ବର୍ତ୍ତମାନ AECD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ର ।

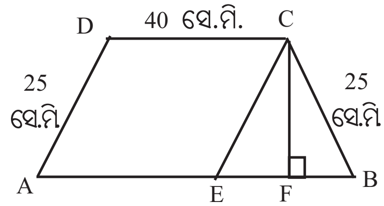
$\therefore$ CE = AD = BC = 25 ସେ.ମି. ଏବଂ AE = CD = 40 ସେ.ମି.,

$\therefore$ EB = AB – AE = 54 – 40 = 14 ସେ.ମି.,

$\therefore$ ΔBCE ରେ BC = CE

$\therefore$ Δ BCE ଏକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ।

C ବିନ୍ଦୁରୁ ଭୂମି $\overline{EB}$ ପ୍ରତି $\overline{CF}$ ଲମ୍ବ ।



(ଚିତ୍ର 5.17)

ତେଣୁ EF = FB = $\frac{1}{2}$ EB = $\frac{1}{2} \times 14 = 7$ ସେ.ମି.

$\therefore$ ΔBCF ରେ CF = $\sqrt{BC^2 - BF^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$ ସେ.ମି.

ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା = 24 ସେ.ମି.

ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ × ଉଚ୍ଚତା × ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି

$= \frac{1}{2} \times 24\,(54 + 40)$ ବର୍ଗ ସେ.ମି.= $12 \times 94 = 1128$ ବର୍ଗ ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

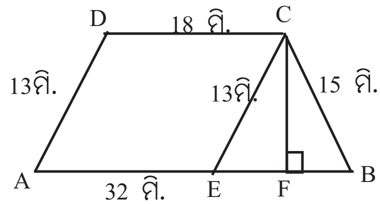
ଉଦାହରଣ - 23 :

ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 32 ମିଟର ଓ 18 ମିଟର ଏବଂ ଅସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 13 ମିଟର ଓ 15 ମିଟର ହେଲେ, ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ABCD ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ବାହୁଦ୍ୱୟର ସାମନ୍ତର ।

ମନେକର AB = 32 ମିଟର, CD = 18 ମିଟର ଏବଂ AD = 13 ମିଟର ଓ BC = 15 ମିଟର ।

C ବିନ୍ଦୁରୁ $\overline{AD}$ ସହିତ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା $\overline{AB}$ କୁ E ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରୁ ଏବଂ C ବିନ୍ଦୁରୁ $\overline{AB}$ ପ୍ରତି $\overline{CF}$ ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ।



(ଚିତ୍ର 5.18)

ବର୍ତ୍ତମାନ AECD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ର ।

∴ AE = DC = 18 ମିଟର ଓ CE = AD = 13 ମିଟର

EB = AB – AE = 32 – 18 = 14 ମିଟର

ବର୍ତ୍ତମାନ ΔBCE ର ବାହୁତ୍ରୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 13 ମି., 14 ମି. ଓ 15 ମି. ।

ଏହାର ଅର୍ଦ୍ଧ ପରିସୀମା = $s = \frac{13+14+15}{2}$ ମିଟର = 21 ମିଟର ।

∴ ΔBCE ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}$ ବ.ମି.

= $\sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6}$ ବ.ମି. = $\sqrt{7^2 \times 3^2 \times 4^2}$ ବ.ମି. = $7 \times 3 \times 4 = 84$ ବର୍ଗ ମିଟର

∴ ΔBCE ର ଉଚ୍ଚତା CF = $\frac{2 \times \text{କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\text{ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}} = \frac{2 \times 84}{14}$ ମିଟର = 12 ମିଟର ।

ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ × ଉଚ୍ଚତା × ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି

$= \frac{1}{2} \times 12\,(32 + 18) = 6 \times 50 = 300$ ବର୍ଗ ମିଟର (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5 (d)

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡିକର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

(i) ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 3 ସେ.ମି. ଓ 5 ସେ.ମି. । ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ବ୍ୟବଧାନ 3 ସେ.ମି. ହେଲେ, ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କେତେ ?

(ii) ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି 18 ସେ.ମି ଓ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 36 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ବ୍ୟବଧାନ କେତେ ?

(iii) ABCD ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ରେ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ । ଯଦି AB = 6 ସେ.ମି., ବ୍ୟବଧାନ AE = 4 ସେ.ମି.ଓ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 28 ବର୍ଗ ସେ.ମି, ହୁଏ । ତେବେ CD କେତେ ?

(iv) ଏକ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର ଅସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁକୁ ଯୋଗକରୁଥିବା ସରଳରେଖାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 8 ସେ.ମି. ଓ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 40 ବର୍ଗ ସେ.ମି ହେଲେ, ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ବ୍ୟବଧାନ କେତେ ?

(v) ABCD ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ରେ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ଓ 2AB = CD । ଯଦି ସମାନ୍ତର ବାହୁମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ବ୍ୟବଧାନ 4 ସେ.ମି ଓ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 42 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ହୁଏ, ତେବେ CD କେତେ ?

2. (i) ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା 12 ସେ.ମି. ଏବଂ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 96 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ହେଲେ, ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି କେତେ ?

(ii) ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 5 ମିଟର ଓ 7 ମିଟର ଏବଂ ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ବ୍ୟବଧାନ 6 ମିଟର ହେଲେ, ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iii) ABCD ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ପରସ୍ପର ସମାନ୍ତର ଏବଂ AB = 2 CD । ଯଦି ଏହାର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି, ତେବେ ΔAOB ଓ ΔCOD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ର ଅନୁପାତ କେତେ ହେବ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 384 ବର୍ଗ ସେ.ମି । ଯଦି ଏହାର ସାମନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତ 3 : 5 ହୁଏ,ଏବଂ ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ବ୍ୟବଧାନ 12 ସେ.ମି ହୁଏ ତେବେ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ସମାନ୍ତର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 58 ମିଟର ଓ 72 ମିଟର ଏବଂ ଏହାର ଉଚ୍ଚତା 15 ମିଟର ହେଲେ, କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

5. ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 55 ମିଟର ଓ 35 ମିଟର ଏବଂ ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 810 ବର୍ଗ ମି. ହେଲେ, ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

6. ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର ଦୁଇ ସମାନ୍ତର ବାହୁ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅନ୍ୟଠାରୁ 20 ସେ.ମି. ବେଶୀ ଓ ଏହି ବାହୁଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ବ୍ୟବଧାନ 25 ସେ.ମି. । ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 1250 ବର୍ଗ ସେ.ମି ହେଲେ, ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

7. ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ବ୍ୟବଧାନ 30 ମିଟର ଏବଂ ସେହି ଦୁଇଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତ 2 : 3 ଅଟେ । ଗୋଟିକର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅନ୍ୟଠାରୁ 10 ମିଟର ଅଧିକ ହେଲେ, କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

8. ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 960 ବର୍ଗ ମିଟର । ଏହାର ଉଚ୍ଚତା 6 ମିଟର ଓ ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନ୍ତର 20 ମିଟର ହେଲେ, ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

9. ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର ଏକ ସମାନ୍ତର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 44 ମିଟର ଓ ଅନ୍ୟ ସମାନ୍ତର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଉଚ୍ଚତାର ଅର୍ଦ୍ଧେକ । ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 885 ବର୍ଗ ମିଟର ହେଲେ, ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

10. ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର ଅସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁକୁ ଛେଦକରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 39 ସେ.ମି । ଏହି ରେଖାଖଣ୍ଡଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ସମାନ୍ତର ବାହୁର ଦୂରତା 12 ସେ.ମି ହେଲେ, କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

11. ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 24 ମିଟର ଓ 50 ମିଟର ଏବଂ ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ବ୍ୟବଧାନ 12 ମିଟର । ଅସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌କୁ ଯେଉଁ ଦୁଇଟି ଚତୁର୍ଭୁଜରେ ବିଭକ୍ତ କରେ, ସେମାନଙ୍କର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

12. ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 35 ମିଟର ଓ 50 ମିଟର । ଏହାର ଅସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ ସମାନ୍ତର ବାହୁମାନଙ୍କ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଓ ଅନ୍ୟଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 17 ମିଟର ହେଲେ, କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

13. ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 210 ବର୍ଗ ସେ.ମି. । ଏହାର ଅସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 17 ସେ.ମି. ଓ ଅନ୍ୟଟି ସମାନ୍ତର ବାହୁମାନଙ୍କ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ । ଯଦି ଗୋଟିଏ ସମାନ୍ତର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅନ୍ୟଠାରୁ ୪ ସେ.ମି. ଅଧିକ ହୁଏ, ତେବେ ବାହୁ ତିନୋଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

14. ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର ଦୁଇ ସମାନ୍ତର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 54 ସେ.ମି. ଓ 30 ସେ.ମି. ଏବଂ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅସମାନ୍ତର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 20 ସେ.ମି. ହେଲେ, କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

15. ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ 60^0 ଅଟେ । ଏହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅସମାନ୍ତର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 16 ସେ.ମି. ଏବଂ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $336\sqrt{3}$ ବର୍ଗ ସେ.ମି. ହେଲେ, ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

16. ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $550\sqrt{3}$ ବର୍ଗ ମିଟର ଏବଂ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅସମାନ୍ତର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 20 ମିଟର । ଏହାର ବୃହତ୍ତର ସମାନ୍ତର ବାହୁ ସଂଲଗ୍ନ କୋଣଦ୍ୱୟର ପରିମାଣ ପ୍ରତ୍ୟେକ 60^0 ହେଲେ, ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

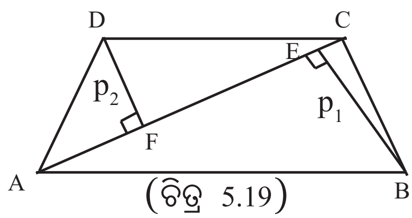
17. ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର ଦୁଇ ସମାନ୍ତର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 42 ମିଟର ଓ 30 ମିଟର । ଏହାର ବୃହତ୍ତର ସମାନ୍ତର ବାହୁର ସଂଲଗ୍ନ କୋଣଦ୍ୱୟର ପରିମାଣ 90^0 ଓ 45^0 ହେଲେ, ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

5.6. ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ :

ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱାରା ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଦୁଇଗୋଟି ତ୍ରିଭୁଜରେ ବିଭକ୍ତ ହୁଏ ଏବଂ ଏହି ଦୁଇ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ର ସମଷ୍ଟି ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସହ ସମାନ । କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟରୁ ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ।

ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

(A) ଚତୁର୍ଭୁଜର ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଏବଂ ସେହି କର୍ଣ୍ଣପ୍ରତି ବିପରୀତ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ (p_1 ଓ p_2) ଦତ୍ତ ଥିଲେ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :



(ଚିତ୍ର 5.19)

ABCD ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜର $\overline{AC}$ କର୍ଣ୍ଣ

ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

= ΔABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + ΔACD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$= \frac{1}{2} \times AC \times BE \times + \frac{1}{2} \times AC \times DF = \frac{1}{2} \times AC \times (p_1 + p_2)$

∴ ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ × କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ × ଲମ୍ବଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି ।

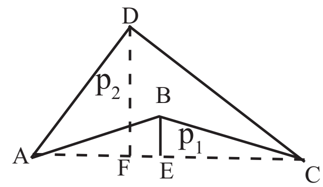
(B) ଉତ୍ତଳ ହୋଇନଥବା ଚତୁର୍ଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଏଥି ପ୍ରତି ବିପରୀତ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ (p_1 ଓ p_2) ଦତ୍ତ ଥିଲେ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ମନେକର ABCD ଏକ ଉତ୍ତଳ ହୋଇନଥିବା ଚତୁର୍ଭୁଜ । ତେଣୁ $\overline{AC}$ କର୍ଣ୍ଣଟି ଚତୁର୍ଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ ହେବ ।

$\therefore$ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

= ΔADC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ – ΔABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$= \frac{1}{2}\ AC \times DF - \frac{1}{2}\ AC \times BE = \frac{1}{2}\ AC\ (p_2 - p_1)$



(ଚିତ୍ର 5.20)

$\therefore$ **ଚତୁର୍ଭୁଜର ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣ କ୍ଷେତ୍ରର ବହିଃସ୍ଥ ହେଲେ ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ**

$= \frac{1}{2} \times$ ବହିଃସ୍ଥ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $\times$ ବିପରୀତ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଏଥିପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନ୍ତର ।

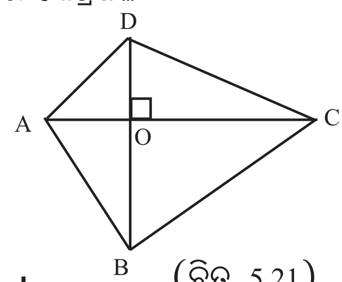
(C) ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମକୋଣରେ ଛେଦ କରୁଥିଲେ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ମନେକର ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ସମକୋଣରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ।

$\therefore$ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ΔABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + ΔADC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$= \frac{1}{2}\ AC \times BO + \frac{1}{2}\ AC \times OD$

$= \frac{1}{2}\ AC\ (BO + OD) = \frac{1}{2} \times AC \times BD$



(ଚିତ୍ର 5.21)

$\therefore$ **ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମକୋଣରେ ଛେଦ କରୁଥିଲେ**

ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଗୁଣଫଳର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ।

(D) ଚତୁର୍ଭୁଜର ଚାରିବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଥିଲେ, କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣ ଦ୍ୱାରା ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜରେ ପରିଣତ ହୋଇଥାଏ । ପ୍ରତ୍ୟେକ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ସମ୍ଭବ; କାରଣ ଗଠିତ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟର ତିନି ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଅଛି । ଏହି ଦୁଇ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ସମଷ୍ଟି, ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସହ ସମାନ ହେବ ।

ଉଦାହରଣ - 24 :

ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମକୋଣରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 68 ସେ.ମି.ଓ 59 ସେ.ମି. ହେଲେ ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ନିର୍ଣ୍ଣେୟ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ $\times$ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଗୁଣଫଳ

$= \frac{1}{2} \times 68 \times 59$ ବର୍ଗ ସେ.ମି. = 2006 ବର୍ଗ ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 25 :

ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 1210 ବର୍ଗ ମିଟର ଏବଂ ଏହାର ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 55 ମିଟର । ଯଦି ଉକ୍ତ କର୍ଣ୍ଣ ଉପରେ ତାହାର ବିପରୀତ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟରୁ ଅଙ୍କିତ ଗୋଟିଏ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅପରଠାରୁ 4 ମିଟର ଅଧିକ ହୁଏ, ତେବେ ଲମ୍ବ ଦୁଇଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ଗୋଟିଏ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = x ମିଟର ଏବଂ ଅନ୍ୟ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = x + 4 ମିଟର

ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ × ଏହି କର୍ଣ୍ଣପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି

= $\frac{1}{2}$ × 55 (x + x + 4) ବର୍ଗ ମିଟର = 55 (x + 2) ବର୍ଗ ମିଟର ।

ଅତଏବ $55 (x + 2) = 1210 \Rightarrow x + 2 = \frac{1210}{55} = 22$

$\Rightarrow x = 22 - 2 = 20$ ମିଟର ଏବଂ ଅନ୍ୟଟି $x + 4 = 20 + 4 = 24$

$\therefore$ ଲମ୍ବଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 20 ମିଟର ଓ 24 ମିଟର । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 26 :

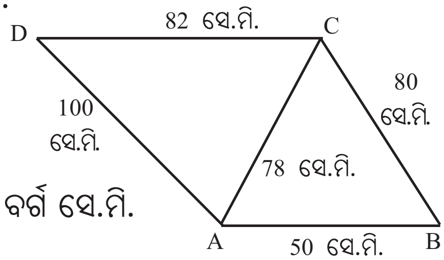
ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର AB = 50 ସେ.ମି., BC = 80 ସେ.ମି., CD = 82 ସେ.ମି. ଓ DA = 100 ସେ.ମି. । $\overline{AC}$ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 78 ସେ.ମି ହେଲେ ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ABCD ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜ ।

ଦତ୍ତ AB = 50 ସେ.ମି., BC = 80 ସେ.ମି., CD = 82 ସେ.ମି., DA = 100 ସେ.ମି. ଓ କର୍ଣ୍ଣ AC = 78 ସେ.ମି.

ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ $\overline{AC}$ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱାରା ΔABC ଓ ΔACD ରେ ବିଭକ୍ତ ହୋଇଛି ।

ΔABC ର ଅର୍ଦ୍ଧ ପରିସୀମା = $s = \frac{50+80+78}{2}$ = 104 ସେ.ମି.



(ଚିତ୍ର 5.22)

$\therefore \Delta ABC$ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

= $\sqrt{104(104-50)(104-80)(104-78)}$ ବର୍ଗ ସେ.ମି.

= $\sqrt{104 \times 54 \times 24 \times 26}$ ବର୍ଗ ସେ.ମି.= $\sqrt{26^2 \times 4 \times 9 \times 6 \times 6 \times 4}$ ବର୍ଗ ସେ.ମି.

= (26 x 6 x 4 x 3) ବର୍ଗ ସେ.ମି.= 1872 ବର୍ଗ ସେ.ମି.

ପୁନଶ୍ଚ ΔACD ର ଅର୍ଦ୍ଧପରିସୀମା = $s = \frac{82+100+78}{2}$ ସେ.ମି.= 130 ସେ.ମି.

$\therefore \Delta ACD$ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

= $\sqrt{130(130-32)(130-100)(130-78)}$ ବର୍ଗ ସେ.ମି.

= $\sqrt{130 \times 48 \times 30 \times 52}$ ବର୍ଗ ସେ.ମି. = $\sqrt{13 \times 10 \times 16 \times 3 \times 3 \times 10 \times 13 \times 4}$ ବର୍ଗ ସେ.ମି.

= (13 x 8 x 3 x 10) ବର୍ଗ ସେ.ମି. = 3120 ବର୍ଗ ସେ.ମି.

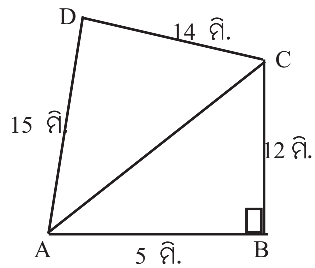
$\therefore$ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ΔABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + ΔACD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

= (1872 + 3120) ବର୍ଗ ସେ.ମି. = 4992 ବର୍ଗ ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 27 :

ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 5 ମି., 12 ମି., 14 ମି. ଓ 15 ମି । ପ୍ରଥମ ଦୁଇ ବାହୁର ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣର ପରିମାଣ 90^0 ହେଲେ ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜରେ AB = 5 ମି., BC = 12 ମି., CD = 14 ମି., AD = 15 ମି. $m\angle B = 90^0$



(ଚିତ୍ର 5.23)

ΔABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ × ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ × ଉଚ୍ଚତା

= $\frac{1}{2} \times 5 \times 12$ ବର୍ଗ.ମିଟର = 30 ବର୍ଗ ମିଟର ।

ପୁନଶ୍ଚ ABC ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ AC = $\sqrt{AB^2 + BC^2}$

= $\sqrt{5^2 + 12^2}$ = 13 ମିଟର

ADC ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁତ୍ରୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 13 ମିଟର, 14 ମିଟର ଓ 15 ମିଟର

ଅର୍ଦ୍ଧ ପରିସୀମା = s = $\frac{13+14+15}{2} = \frac{42}{2} = 21$ ମିଟର

$\therefore \Delta ADC$ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}$

= $\sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6} = \sqrt{7 \times 3 \times 7 \times 8 \times 2 \times 3} = 7 \times 3 \times 4 = 84$ ବର୍ଗମିଟର

$\therefore$ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ΔABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + ΔADC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

= (30 + 84) ବର୍ଗ ମିଟର = 114 ବର୍ଗ ମିଟର (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 28 :

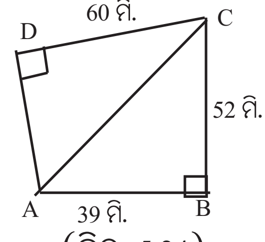
ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର $\angle ABC$ ଓ $\angle ADC$ କୋଣ ଦ୍ୱୟ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମକୋଣ । ଏହାର $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ଓ $\overline{CD}$ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 39 ମି, 52 ମି ଓ 60 ମି ହେଲେ, ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ: ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜରେ AB = 39 ମି, BC = 52 ମି ଏବଂ CD = 60 ମି.; $m\angle ABC = m\angle ADC = 90^0$

ABC ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2} \times 39 \times 52$ ବର୍ଗ ମି. = 1014 ବର୍ଗ ମିଟର

ABC ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ AC = $\sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{39^2 + 52^2} = 13 \times 5 = 65$ ମି

ADC ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ AD = $\sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{65^2 - 60^2} = \sqrt{625} = 25$ ମି



(ଚିତ୍ର 5.24)

$\therefore \Delta ADC$ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2} \times AD \times CD = \frac{1}{2} \times 25 \times 60$ ବ.ମି. = 750 ବ.ମି.

$\therefore$ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

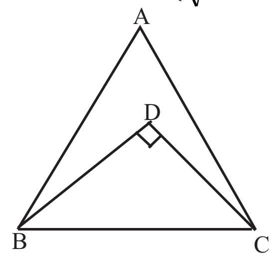
= ΔABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + ΔADC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

= (1014 + 750) = 1764 ବର୍ଗ ମିଟର (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 29 :

ABC ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 50 ସେ.ମି. । ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ D ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଯେ $m\angle BDC = 90^0$ ଓ CD : BD = 3 : 4 ହେଲେ ABDC ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ($\sqrt{3}$ =1.732)

ସମାଧାନ : ମନେକର CD = 3x ସେ.ମି.ଓ BD = 4x ସେ.ମି. ସୁତରାଂ



(ଚିତ୍ର 5.25)

Δ BDCରୁ $(4x)^2 + (3x)^2 = 50^2 \Rightarrow 25x^2 = 2500 \Rightarrow x = 10$

$\therefore$ BD = 40 ସେ.ମି. ଓ CD = 30 ସେ.ମି.

$\therefore$ BCD ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \frac{1}{2} \times 40 \times 30$ବର୍ଗ ସେ.ମି.

= 600 ବର୍ଗ ସେ.ମି.

ପୁନଶ୍ଚ ΔABC ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଓ ଏହାର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 50 ସେ.ମି. ।

$\therefore$ ΔABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ)^2 = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ $(50)^2$ ବର୍ଗ ସେ.ମି.

= $625\sqrt{3}$ ବର୍ଗ ସେ.ମି.= 625 x 1.732 = 1082.5 ବର୍ଗ ସେ.ମି.

$\therefore$ ABDC ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ΔABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ – ΔBCD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

= (1082.5 – 600) ବର୍ଗ ସେ.ମି. = 482.5 ବର୍ଗ ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5 (e)

(ଆବଶ୍ୟକ ସ୍ଥଳେ $\sqrt{3}$ ର ମାନ 1.732 ନିଅ)

1. (a) ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 25 ମିଟର ଏବଂ ଏହି କର୍ଣ୍ଣପ୍ରତି ବିପରୀତ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 13 ସେ.ମି. ଓ 11 ସେ.ମି ହେଲେ ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କେତେ ?

(b) ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 560 ବର୍ଗ ସେ.ମି ଏବଂ କର୍ଣ୍ଣପ୍ରତି ବିପରୀତ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି 28 ସେ.ମି. ହେଲେ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କେତେ ?

(c) ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 36 ମିଟର ଏବଂ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 270 ବର୍ଗ ମିଟର ହେଲେ, କର୍ଣ୍ଣପ୍ରତି ବିପରୀତ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି କେତେ ?

(d) ବହିଃସ୍ଥ କର୍ଣ୍ଣ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 36 ସେ.ମି. ଏବଂ କର୍ଣ୍ଣପ୍ରତି ବିପରୀତ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 24 ସେ.ମି. ଓ 16 ସେ.ମି. ହେଲେ ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କେତେ ?

(e) ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମକୋଣରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 24 ମିଟର ଓ 15 ମିଟର ହେଲେ, ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କେତେ ?

(f) ଗୋଟିଏ ବହିଃସ୍ଥ କର୍ଣ୍ଣ ବିଶିଷ୍ଟ ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣପ୍ରତି ବିପରୀତ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର 10 ସେ.ମି ଓ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 180 ବର୍ଗ ସେ.ମି ହେଲେ, ଉକ୍ତ ବହିଃସ୍ଥ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କେତେ ?

(g) ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମକୋଣରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ଯଦି ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 32 ମିଟର ଏବଂ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 640 ବର୍ଗ ମିଟର ହୁଏ, ତେବେ ଅନ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କେତେ ?

2. ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 48 ମିଟର ଏବଂ ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 1296ବର୍ଗ ମିଟର । ଏହି କର୍ଣ୍ଣ ଉପରେ ବିପରୀତ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ ଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତ 4 : 5 ହେଲେ, ଲମ୍ବଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 28 ମିଟର ଏବଂ ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 336 ବର୍ଗ ମିଟର । ଏହି କର୍ଣ୍ଣ ପ୍ରତି ବିପରୀତ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ ଅନ୍ୟଠାରୁ 6 ମିଟର ଅଧିକ ହେଲେ, ଲମ୍ବଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. କୌଣସି ଚତୁର୍ଭୁଜର ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 70 ସେ.ମି । ଏହି କର୍ଣ୍ଣପ୍ରତି ବିପରୀତ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି ଦତ୍ତ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟର $\frac{3}{5}$ ହେଲେ, ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

5. ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 192 ବର୍ଗ ମିଟର ଏବଂ ଏହାର ବହିଃସ୍ଥ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 32 ମିଟର । ଏହି କର୍ଣ୍ଣ ଉପରେ ବିପରୀତ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଏହା ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି 26 ମିଟର ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

6. ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମକୋଣରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 864 ବର୍ଗ ମିଟର ଓ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତ 3 : 4 ହେଲେ, କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

7. ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମକୋଣରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 400 ବର୍ଗ ମିଟର । ଯଦି ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅନ୍ୟଟି ଅପେକ୍ଷା 7 ମିଟର ବେଶୀ ହୁଏ, ତେବେ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

8. ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମକୋଣରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ଏବଂ ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 90 ବର୍ଗ ମିଟର । ଯଦି କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି 28 ମିଟର ହୁଏ, ତେବେ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

9. ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 396 ବର୍ଗ ମିଟର ଏବଂ ଏହାର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମକୋଣରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ଏହାର ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅନ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟର 2 ଗୁଣରୁ 8 ମିଟର ବେଶୀ ହେଲେ, କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

10. ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ ଏବଂ $\overline{AC}$ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 29 ସେ.ମି., 39 ସେ.ମି., 40 ସେ.ମି., 36 ସେ.ମି. ଏବଂ 25 ସେ.ମି ହେଲେ, ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

11. ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଚାରିବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 15 ସେ.ମି, 36 ସେ.ମି., 52 ସେ.ମି. ଓ 65 ସେ.ମି. ଏବଂ ପ୍ରଥମ ଦୁଇବାହୁର ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣର ପରିମାଣ 90^0 ଅଟେ । ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

12. ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଦୁଇଟି ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 8 ମିଟର ଓ 15 ମିଟର ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ ଗୋଟିଏ ସମକୋଣ । ଯଦି ଅନ୍ୟ ବାହୁ ଦୁଇଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ପ୍ରତ୍ୟେକ 17 ମିଟର ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

13. ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 20 ସେ.ମି., 20 ସେ.ମି., 16 ସେ.ମି. ଓ 12 ସେ.ମି ଏବଂ ପ୍ରଥମ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣର ପରିମାଣ 60^0 ହେଲେ, କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

14. ଚତୁର୍ଭୁଜର AB = BC = 50 ସେ.ମି ଏବଂ $m\angle ABC = 60^0$; AD = 30 ସେ.ମି. ଓ $m\angle ADC = 90^0$ ହେଲେ, ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

15. ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର AB = 36 ସେ.ମି., BC = 48 ସେ.ମି., CD = DA = 50 ସେ.ମି., ଏହାର $m\angle ABC = 90^0$ ହେଲେ, ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

5.7 ଘନବସ୍ତୁ (Solids) :

ଏ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଆମେ ଯେଉଁ ଚିତ୍ରଗୁଡ଼ିକ ସଂପର୍କରେ ଆଲୋଚନା କଲେ ସେ ସମସ୍ତ ସାମତଳିକ ଚିତ୍ର । ତେଣୁ ଏହି ଚିତ୍ରଗୁଡ଼ିକୁ ଆମେ ଦ୍ୱିମାତ୍ରିକ (Two Dimensional) କହିଥାଉ । କିନ୍ତୁ ଆମ ଦୈନନ୍ଦିନ ଜୀବନରେ ଯେଉଁ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାର ବସ୍ତୁ ଦେଖୁ ସେଗୁଡ଼ିକ ଦ୍ୱିମାତ୍ରିକ ନୁହନ୍ତି । ଖଣ୍ଡିଏ ଇଟାକୁ ଘରର ଚଟାଣ (ଯାହାକି ଏକ ସମତଳ) ଉପରେ ରଖିଲେ ଇଟାର ଗୋଟିଏ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ଛାଡ଼ିଦେଲେ ଅନ୍ୟ କୌଣସି ଅଂଶ ଚଟାଣରେ ରହିବ ନାହିଁ । ଏହି ପ୍ରକାର ବସ୍ତୁ ଯଥା ଇଟା, ବହି, ବାକ୍ସ, ଗୋଲକ, କୋନ୍ ଇତ୍ୟାଦି ଘନବସ୍ତୁ (Solids) ଅଟନ୍ତି । ଏହି ବସ୍ତୁଗୁଡ଼ିକ ତ୍ରିମାତ୍ରିକ (Three Dimensional)

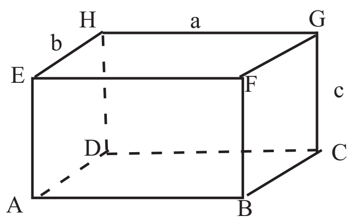
ତ୍ରିମାତ୍ରିକ ବସ୍ତୁ ପାଇଁ ପରିମିତିରେ ଘନଫଳ ଓ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସଂପର୍କରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଥାଏ । ଆମେ ଯେଉଁ ତ୍ରିମାତ୍ରିକ ବସ୍ତୁଦ୍ୱୟର ଆଲୋଚନା କରିବା ସେଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ ଆୟତଘନ (Cuboid) ଓ ସମଘନ (Cube) । ଇଟା ଖଣ୍ଡ ଆୟତଘନର ଉଦାହରଣ ଓ ଲୁଡୁ ଗୋଟି ସମଘନର ଉଦାହରଣ ।

ଏଠାରେ ଉଲ୍ଲେଖ ଯୋଗ୍ୟ ଯେ ଚଟାଣରେ ରଖାଯାଇଥିବା ଇଟାଖଣ୍ଡକୁ ଚଟାଣ ସହ ସମାନ୍ତର ଏକ ସମତଳ ଦ୍ୱାରା ଛେଦ କଲେ ସମତଳସ୍ଥ ଛେଦଟି ଏକ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ଓ ସେହିପରି ଲୁଡୁ ଗୋଟି କ୍ଷେତ୍ରରେ ସମତଳସ୍ଥ ଛେଦଟି ଏକ ବର୍ଗ କ୍ଷେତ୍ର ହେବ ।

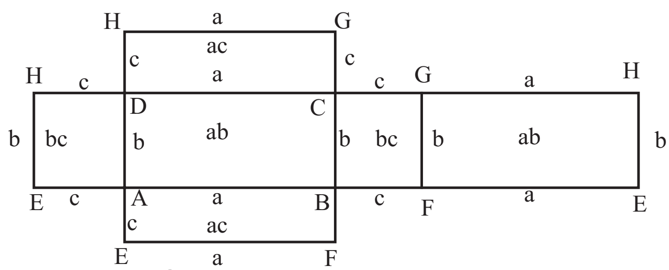
ଘନାକାର ବସ୍ତୁର ଜ୍ୟାମିତି ତ୍ରିମାତ୍ରିକ ହେତୁ ଆମକୁ କଳ୍ପନା ମାଧ୍ୟମରେ ଆନୁସଙ୍ଗିକ ଚିତ୍ରକୁ ବୁଝିବାକୁ ହେବ କାରଣ ସମତଳରେ ଘନାକାର ବସ୍ତୁର ଚିତ୍ରର ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବପର ନୁହେଁ ।

5.8. ଆୟତଘନ ଓ ସମଘନର ଘନଫଳ ଓ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ :

ଆୟତଘନ : ଆୟତଘନ ଛଅଗୋଟି ପୃଷ୍ଠତଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଘନବସ୍ତୁ ଯାହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ପୃଷ୍ଠତଳ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଆୟତ କ୍ଷେତ୍ର ଏବଂ ସମ୍ମୁଖୀନ ପୃଷ୍ଠତଳଦ୍ୱୟ ସମାନ୍ତର ଓ ସର୍ବସମ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ଅଟନ୍ତି ।



(ଚିତ୍ର - 5.26)



(ଚିତ୍ର - 5.27)

ଆୟତଘନର $\overline{EF}, \overline{EH}, \overline{GH}, \overline{AE}, \overline{DH}, \overline{BF}$ ଓ $\overline{CG}$ ଧାରକୁ କାଟି ଯଦି ଚିତ୍ରଟିକୁ ଖୋଲି କରି ସମତଳ ଉପରେ ରଖିବା ତେବେ ଏହା ଯେପରି ଦେଖାଯିବ ତାହା ଚିତ୍ର - 5.27 ରେ ଦର୍ଶିତ ହୋଇଛି ।

ଚିତ୍ର - 5.27 ଏହା ରୁ ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ

ଆୟତଘନର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = (bc + ab + bc + ab + ac + ac) ବର୍ଗ ଏକକ

∴ ଆୟତଘନର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 2 (ab + bc + ac) ବର୍ଗ ଏକକ

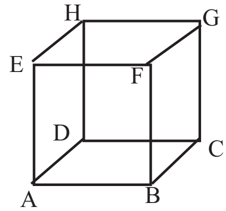
ଓ ପାର୍ଶ୍ୱପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ପାଇଁ ସମଗ୍ରପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳରୁ ଦୁଇଟି ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଅର୍ଥାତ୍ (ab + ab) = 2ab କୁ ବାଦ୍ ଦେବାକୁ ହେବ । କାରଣ ଏ ଦୁଇଟି ନିମ୍ନସ୍ଥ ଓ ଉପରିସ୍ଥ ପୃଷ୍ଠତଳ ।

∴ ଆୟତଘନର ପାର୍ଶ୍ୱ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 2 (a + b) c ବର୍ଗ ଏକକ

ଚିତ୍ର - 5.26 ରେ ଦର୍ଶିତ **ଆୟତଘନର ଘନଫଳ = ଯେ କୌଣସି ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ × ସେହି ପୃଷ୍ଠତଳ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଭାବେ ଅବସ୍ଥିତ ଧାରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ**

∴ ଆୟତଘନର ଘନଫଳ = (ଦୈର୍ଘ୍ୟ x ପ୍ରସ୍ଥ x ଉଚ୍ଚତା) ଘନ ଏକକ

ସମଘନ : ସମଘନରେ ସମସ୍ତ ଧାରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = a ହେଉ । ଏହାକୁ ଚିତ୍ର - 5.28 ରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।



(ଚିତ୍ର - 5.28)

ଆୟତଘନ ପାଇଁ ନିରୁପିତ ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ, ପାର୍ଶ୍ୱପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଓ ଘନଫଳ ସୂତ୍ରରେ b = c = a ଲେଖିଲେ

ସମଘନର **ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $6a^2$ ବର୍ଗ ଏକକ,**

ପାର୍ଶ୍ୱ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $4a^2$ ବର୍ଗ ଏକକ ଏବଂ

ଘନଫଳ = a^3 ଘନ ଏକକ

ସୂଚନା : ଯଦି ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଏକକ ସେ.ମି. ହୁଏ, ତେବେ ଘନଫଳରେ ଘନ ଏକକକୁ $(\text{ସେ.ମି.})^3$ ମଧ୍ୟ ଲେଖାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ - 30 :

ଗୋଟିଏ ଆୟତଘନର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ପ୍ରସ୍ଥ ଓ ଉଚ୍ଚତା ଯଥାକ୍ରମେ 22 ସେ.ମି., 12 ସେ.ମି. ଓ 7.5 ସେ.ମି. ହେଲେ, ଏହାର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ, ପାର୍ଶ୍ୱ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଏବଂ ଆୟତନ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ ଦୈର୍ଘ୍ୟ = a = 22 ସେ.ମି., ପ୍ରସ୍ଥ = b = 12 ସେ.ମି. ଓ ଉଚ୍ଚତା = c = 7.5 ସେ.ମି.

ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 2 (ab + bc + ca) = 2 (22 x 12 + 12 x 7. 5 + 22 x 7.5) ବର୍ଗ ସେ.ମି.

= 2 (264 + 90 + 165) = 2 x 519 = 1038 ବର୍ଗ ସେ.ମି

ପାର୍ଶ୍ୱ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 2 (a + b) x c = 2 (22 + 12) x 7.5 = 285 ବର୍ଗ ସେ.ମି.

ଆୟତନ = a x b x c = (22 x 12 x 7.5) ଘନ ସେ.ମି. = 1980 ଘନ ସେ.ମି.

∴ ଆୟତଘନର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 1038 ସେ.ମି., ପାର୍ଶ୍ୱ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 285 ସେ.ମି. ଏବଂ ଆୟତନ 1980 ଘନ ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 31 :

ଗୋଟିଏ ଆୟତଘନର ଦୈର୍ଘ୍ୟ,ପ୍ରସ୍ଥ ଓ ଉଚ୍ଚତାର ଅନୁପାତ 5 : 3 : 2 ଏବଂ ଏହାର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 992 ବର୍ଗ ସେ.ମି ହେଲେ, ଏହାର ଘନଫଳ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ଆୟତଘନର ଦୈର୍ଘ୍ୟ= a = 5x ସେ.ମି., ପ୍ରସ୍ଥ b = 3x ସେ.ମି. ଓ ଉଚ୍ଚତା c = 2x ସେ.ମି.

∴ ଏହାର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 2 (ab + bc + ca) ବର୍ଗ ସେ.ମି.

= 2 (5x x 3x + 3x x 2x + 5x x 2x) = 2 x $31x^2$ = $62x^2$ ବର୍ଗ ସେ.ମି. ।

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $62x^2 = 992 \Rightarrow x^2 = \frac{992}{62} = 16 \Rightarrow x = 4$

ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 5x ସେ.ମି.= 5 x 4 = 20 ସେ.ମି., ପ୍ରସ୍ଥ = 3x ସେ.ମି.= 3 x 4 = 12 ସେ.ମି.

ଓ ଉଚ୍ଚତା = 2x ସେ.ମି.= 2 x 4 = 8 ସେ.ମି.

ଘନଫଳ = ଦୈର୍ଘ୍ୟ x ପ୍ରସ୍ଥ x ଉଚ୍ଚତା = (20 x 12 x 8) ଘ.ସେ.ମି. = 1920 ଘ.ସେ.ମି.

∴ ଆୟତଘନର ଘନଫଳ 1920 ଘ.ସେ.ମି. । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 32 :

ଗୋଟିଏ ଆୟତଘନର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 492 ବର୍ଗ.ମି । ଯଦି ଏହାର ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 90 ବର୍ଗ.ମି ଏବଂ ଏହାର ଗୋଟିଏ ପାର୍ଶ୍ୱ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 60 ବର୍ଗ.ମି. ହୁଏ ତେବେ ଏହାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ପ୍ରସ୍ଥ ଓ ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ଆୟତଘନର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ପ୍ରସ୍ଥ ଓ ଉଚ୍ଚତା ଯଥାକ୍ରମେ a ମି, b ମି, c ମି. । ଦତ୍ତ ଅଛି ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ab = 90 ବର୍ଗ ମି., ଗୋଟିଏ ପାର୍ଶ୍ୱ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = bc = 60 ବର୍ଗ.ମି. ଓ ଏହାର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $2(ab + bc + ca) = 492 \Rightarrow 2(90 + 60 + ca) = 492 \Rightarrow 150 + ca = 246$

$\Rightarrow ca = 96$ ବର୍ଗ ମି.

$\therefore$ ଅନ୍ୟ ପାର୍ଶ୍ୱ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ca = 96 ବର୍ଗ.ମି

ବର୍ତ୍ତମାନ $ab \times bc \times ca = 90 \times 60 \times 96 \Rightarrow a^2b^2c^2 = 9 \times 6 \times 6 \times 1600$

$\Rightarrow abc = (3 \times 6 \times 4 \times 10) = 720;$

$$\therefore a = \frac{abc}{bc} = \frac{720}{60} = 12,\ b = \frac{abc}{ca} = \frac{720}{96} = 7.5,\ c = \frac{abc}{ab} = \frac{720}{90} = 8$$

$\therefore$ ଆୟତଘନର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ପ୍ରସ୍ଥ ଓ ଉଚ୍ଚତା ଯଥାକ୍ରମେ 12 ମି, 7.5 ମି ଓ 8 ମି. । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 33 :

ଗୋଟିଏ କୋଠରିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ପ୍ରସ୍ଥ ଓ ଉଚ୍ଚତା ଯଥାକ୍ରମେ 5 ମି, 4 ମି ଏବଂ 3 ମି । ପ୍ରତି ବର୍ଗ ମିଟରକୁ ଟ 7.50 ପଇସା ହିସାବରେ କୋଠରିର କାନ୍ଥ ଗୁଡ଼ିକୁ ଏବଂ ଛାତକୁ ରଙ୍ଗ ଲଗାଇବାରେ କେତେ ଖର୍ଚ୍ଚ ହେବ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ ଦୈର୍ଘ୍ୟ a = 5 ମି, ପ୍ରସ୍ଥ b = 4 ମି ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା c = 3 ମି

ରଙ୍ଗ ହେବା ପାଇଁ ଥିବା କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ= $2bc+2ca+ab = 2 \times 4 \times 3 + 2 \times 5 \times 3 + 5 \times 4 = 74$ ବର୍ଗ ମି.

ପ୍ରତି ବର୍ଗ ମି.କୁ 7.50 ପଇସା ହିସାବରେ 74 ବର୍ଗ ମି. କାନ୍ଥ ଓ ଛାତକୁ ରଂଗ କରିବାକୁ ଖର୍ଚ୍ଚ ହେବ

$74 \times 7.50 = 555$ ଟଙ୍କା

$\therefore$ ଟ 555 . 00 ରଂଗ କରିବାକୁ ଖର୍ଚ୍ଚ ହେବ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 34 :

ଗୋଟିଏ ସମଘନାକାର ଖୋଲା ଟିଣ କୁଣ୍ଡର ଭିତର ପାଖ କଳଙ୍କି ସଫା କରିବା ପାଇଁ ପ୍ରତି ବର୍ଗ ମିଟରକୁ 5.50 ଟଙ୍କା ହିସାବରେ 440 ଟଙ୍କା ଖର୍ଚ୍ଚ ହେଲା । କୁଣ୍ଡଟିର ଗଭୀରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ସମଘନାକାର ଖୋଲା କୁଣ୍ଡର ଭିତର ପାଖର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = ପ୍ରସ୍ଥ = ଉଚ୍ଚତା = a ମି

ଏହାର ଭିତରର ଗୋଟିଏ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = a^2 ବର୍ଗ.ମି

ଯେହେତୁ ସମଘନାକାର କୁଣ୍ଡଟିର ଉପର ଖୋଲା, ଏହାର ପାଞ୍ଚଗୋଟି ପୃଷ୍ଠତଳ ସଫା କରିବାକୁ ହେବ ।

ଏହି ପାଞ୍ଚଗୋଟି ତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ସମଷ୍ଟି = $5a^2$ ବର୍ଗ.ମି

କଳଙ୍କି ସଫା ନିମିତ୍ତ ପ୍ରତି ବ.ମି କୁ ଟ 5.50 ହିସାବରେ 440 ଟଙ୍କା ଖର୍ଚ୍ଚ ହୋଇଛି ।

$\therefore$ କୁଣ୍ଡଟିର ଭିତର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{440.00}{5.50}$ = 80 ବର୍ଗ.ମି.

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $5a^2 = 80 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$ ମି.

$\therefore$ କୁଣ୍ଡଟର ଗଭୀରତା 4 ମି (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 35 :

ଦୁଇଟି ସମଘନର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ସମଷ୍ଟି 1464 ବର୍ଗ ସେ.ମି. । ସମଘନ ଦୁଇଟିର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତ 5 : 6 ହେଲେ, ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି ପ୍ରତ୍ୟେକର ଘନଫଳ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : ଗୋଟିଏ ସମଘନର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତ 5 : 6 ଅଟେ । ଗୋଟିଏ ସମଘନର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 5x ସେ.ମି.ଓ ଅନ୍ୟଟିର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 6x ସେ.ମି

ପ୍ରଥମ ସମଘନର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $6 \times (5x)^2 = 150x^2$ ବର୍ଗ. ସେ.ମି.

ଦ୍ୱିତୀୟ ସମଘନର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $6 \times (6x)^2 = 216x^2$ ବର୍ଗ ସେ.ମି.

ଉଭୟ ସମଘନର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ସମଷ୍ଟି $150x^2 + 216x^2$ ବର୍ଗ ସେ.ମି.$\Rightarrow 366x^2$ ବର୍ଗ ସେ.ମି.

$\therefore 366x^2 = 1464$ ବର୍ଗ ସେ.ମି. $\Rightarrow x^2 = 4 \;\; \Rightarrow x = 2$

$\therefore$ ସମଘନଦ୍ୱୟର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $5x = 10$ ସେ.ମି. ଓ $6x = 12$ ସେ.ମି.

ପ୍ରଥମ ସମଘନର ଘନଫଳ = $(10)^3$ ଘନ.ସେ.ମି. = 1000 ଘ.ସେ.ମି.

ଦ୍ୱିତୀୟ ସମଘନର ଘନଫଳ = $(12)^3$ ଘନ.ସେ.ମି. = 1728 ଘ.ସେ.ମି.

$\therefore$ ସମଘନଦ୍ୱୟର ଘନଫଳ ଯଥାକ୍ରମେ 1000 ଘ.ସେ.ମି. ଓ 1728 ଘ.ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 36 :

ଗୋଟିଏ ବନ୍ଦ ଥିବା କାଠ ବାକ୍ସର ବାହାର ପାଖର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ପ୍ରସ୍ଥ ଓ ଉଚ୍ଚତା ଯଥାକ୍ରମେ 30 ସେ.ମି., 22 ସେ.ମି. ଓ 12 ସେ.ମି. । ବାକ୍ସଟି ଯେଉଁ କାଠରେ ନିର୍ମିତ ତାହା ଯଦି 2 ସେ.ମି. ମୋଟା ହୁଏ, ତେବେ ବାକ୍ସରେ ବ୍ୟବହୃତ କାଠର ଆୟତନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ବାକ୍ସଟିର ବାହାର ପାଖର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 30 ସେ.ମି., ପ୍ରସ୍ଥ 22 ସେ.ମି., ଉଚ୍ଚତା 12 ସେ.ମି.

କାଠର ବେଧ = 2 ସେ.ମି.

$\therefore$ ଭିତର ପାଖର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $= 30 - 2 \times 2 = 26$ ସେ.ମି., ପ୍ରସ୍ଥ $= 22 - 2 \times 2 = 18$ ସେ.ମି. ଏବଂ

ଉଚ୍ଚତା $= 12 - 2 \times 2 = 8$ ସେ.ମି.

କାଠର ଆୟତନ = ସମୁଦାୟ ବାକ୍ସର ଆୟତନ – ଭିତର ଫମ୍ପା ଅଂଶର ଆୟତନ

= $(30 \times 22 \times 12)$ ଘ. ସେ.ମି. – $(26 \times 18 \times 8)$ ଘ. ସେ.ମି.

= 7920 ଘ. ସେ.ମି. – 3744 ଘ. ସେ.ମି. = 4176 ଘ. ସେ.ମି.

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5 (f)

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡିକର ଉତ୍ତର ଦିଅ :

(a) ଗୋଟିଏ ଆୟତଘନାକାର ବସ୍ତୁର ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ ଉଚ୍ଚତା ଓ ଉଚ୍ଚତାକୁ ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କଲେ ଏହାର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳରେ କିଛି ପରିବର୍ତ୍ତନ ହେବ କି ?

(b) କାର୍ଡ ବୋର୍ଡରେ ନିର୍ମିତ ଢାଙ୍କୁଣି ନଥିବା ଏକ ସମଘନାକୃତି ବାକ୍ସର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁ 6 ସେ.ମି. ହେଲେ ବାକ୍ସରେ ବ୍ୟବହୃତ କାର୍ଡ଼ବୋର୍ଡ଼ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କେତେ ?

(c) ଗୋଟିଏ ଆୟତଘନର ଭୂମିର ପରିସୀମା 22 ସେ.ମି ଓ ଉଚ୍ଚତା 15 ସେ.ମି ହେଲେ, ଏହାର ପାର୍ଶ୍ୱପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କେତେ ?

(d) ଗୋଟିଏ ସମଘନର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 216 ବର୍ଗ ମି. ହେଲେ, ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କେତେ ?

(e) ଗୋଟିଏ ଆୟତଘନର ପାର୍ଶ୍ୱପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 336 ବର୍ଗ.ମି.ଏବଂ ଭୂମିର ପରିସୀମା 24 ମିଟର ହେଲେ ଉଚ୍ଚତା କେତେ ?

(f) a ଏକକ ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ତିନିଗୋଟି ସମଘନକୁ ଏପରି ଭାବେ ସଜାଇ ପାଖାପାଖି ରଖାଗଲା ଯେ, ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନବସ୍ତୁଟି ଏକ ଆୟତଘନ । ତେବେ ଆୟତଘନର ସମଗ୍ରପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କେତେ ?

(g) ଦୁଇଟି ସମଘନର ଆୟତନର ଅନୁପାତ 8 : 1 ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କର ବାହୁମାନଙ୍କର ଅନୁପାତ କେତେ ?

(h) ତିନୋଟି ଧାତବ ସମଘନର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 5 ସେ.ମି, 4 ସେ.ମି ଓ 3 ସେ.ମି. । ଏହି ତିନୋଟି ଧାତବ ସମଘନକୁ ତରଳାଇ ଗୋଟିଏ ନୂତନ ସମଘନ ତିଆରି କଲେ ତାହାର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କେତେ ?

(i) ଗୋଟିଏ ସମଘନର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦୁଇଗୁଣ ବଢିଗଲେ ଏହାର ଆୟତନ ପୂର୍ବାପେକ୍ଷା କେତେ ଗୁଣ ବଢ଼ିବ ?

(j) ଦୁଇଟି ସମଘନର ଆୟତନର ଅନୁପାତ 1 : 27 ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅନୁପାତ କେତେ ?

(k) ଗୋଟିଏ ଆୟତାକାର ପୋଖରୀର ଆଧାରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 6500 ବର୍ଗ.ସେ.ମି. ଏବଂ ଏଥିରେ ଥିବା ପାଣିର ଆୟତନ 2.6 ଘନମିଟର ହେଲେ, ଜଳର ଗଭୀରତା କେତେ ?

(l) 40 ମିଟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, 16 ମିଟର ପ୍ରସ୍ଥ ଓ 2 ମିଟର ଗଭୀରତା ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ଖାତ ଖୋଳିଲେ ଖୋଳାଯାଇଥିବା ମାଟିର ଆୟତନ କେତେ ?

(m) P ଓ Q, $\sqrt{3}$ ସେ.ମି. ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସମଘନ ଉପରିସ୍ଥ ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ, PQ ଦୂରତାର ସର୍ବାଧିକ ମାନ କେତେ ?

2. (a) ଗୋଟିଏ ଇଟାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ପ୍ରସ୍ଥ ଓ ଉଚ୍ଚତା ଯଥାକ୍ରମେ 21 ସେ.ମି., 12 ସେ.ମି.ଓ 8 ସେ.ମି. ଅଟେ । 9 ମିଟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, 1 ମିଟର ଉଚ୍ଚତା ଓ 7 ମିଟର ପ୍ରସ୍ଥ ବିଶିଷ୍ଟ କାନ୍ଥ ନିର୍ମାଣ କରିବା ପାଇଁ କେତୋଟି ଇଟା ଲାଗିବ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(b) ଗୋଟିଏ ସମଘନର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁକୁ 50 ପ୍ରତିଶତ ବଢାଇଲେ ଏହାର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କେତେ ପ୍ରତିଶତ ବଢ଼ିବ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(c) 2 ମିଟର ଗଭୀର ଏବଂ 45 ମିଟର ପ୍ରସ୍ଥ ବିଶିଷ୍ଟ ନଦୀର ଜଳ ଘଣ୍ଟାକୁ 3 କି.ମି.ହିସାବରେ ପ୍ରବାହିତ ହେଉଛି । ପ୍ରତି ମିନିଟ୍‌ରେ ସମୁଦ୍ରକୁ ପ୍ରବାହିତ ହେଉଥିବା ଜଳର ପରିମାଣ ନିରୂପଣ କର ।

(d) 12 ମିଟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ 8 ମିଟର ପ୍ରସ୍ଥ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ବେଦି ତିଆରି କରିବାକୁ ପ୍ରତି ଘନମିଟରକୁ 10 ଟଙ୍କା ହିସାବରେ 480 ଟଙ୍କା ଖର୍ଚ୍ଚ ହେଲା, ବେଦିର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(e) (i) 1 ସେ.ମି. ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ସମଘନର କର୍ଣ୍ଣକୁ ବାହୁ ଭାବେ ନେଇ ଗଠିତ ସମଘନର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କେତେ ?

(ii) ଦତ୍ତ ସମଘନ ଓ ଉତ୍ପନ୍ନ ସମଘନର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅନୁପାତ କେତେ ?

3. ଗୋଟିଏ ଆୟତଘନର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ପ୍ରସ୍ଥ ଓ ଉଚ୍ଚତା ଯଥାକ୍ରମେ 12 ମିଟର, 8 ମିଟର ଓ 5 ମିଟର ହେଲେ (i) ଏହାର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ (ii) ଏହାର ପାର୍ଶ୍ୱପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଏବଂ (iii) ଆୟତନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ଗୋଟିଏ ଆୟତଘନର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ପ୍ରସ୍ଥର ଦୁଇଗୁଣ ଓ ଉଚ୍ଚତାର 3 ଗୁଣ । ଉଚ୍ଚତା 6 ସେ.ମି ହେଲେ, ଏହାର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

5. ଗୋଟିଏ ବନ୍ଦଥିବା ବାକ୍ସର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ପ୍ରସ୍ଥ ଓ ଉଚ୍ଚତା ଯଥାକ୍ରମେ 18 ସେ.ମି., 12 ସେ.ମି.ଓ 8 ସେ.ମି ହେଲେ, ଏହାର ବାହାର ପାଖକୁ ରଙ୍ଗ କରିବାରେ ପ୍ରତି ବର୍ଗ ସେ.ମିକୁ 50 ପଇସା ହିସାବରେ କେତେ ଖର୍ଚ୍ଚ ହେବ ?

6. ଏକ ସମଘନର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 264 ବର୍ଗ.ମି. ହେଲେ, ଏହାର ପାର୍ଶ୍ୱପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କେତେ ?

7. ଗୋଟିଏ ସମଘନାକାର ଖୋଲା ପାଣି ଟାଙ୍କିର ଭିତର ପାଖ ରଂଗ କରିବାରେ ପ୍ରତି ବର୍ଗ ସେ.ମିକୁ 50 ପଇସା ହିସାବରେ 90 ଟଙ୍କା ଖର୍ଚ୍ଚ ହେଲା । ପାଣି ଟାଙ୍କିର ଭିତର ପାଖର ଉଚ୍ଚତା କେତେ ?

8. ଗୋଟିଏ ଆୟତଘନର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ପ୍ରସ୍ଥ ଓ ଉଚ୍ଚତାର ଅନୁପାତ 6 : 5 : 4 ଏବଂ ଏହାର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 5328 ବର୍ଗ.ମି. ହେଲେ, ପାର୍ଶ୍ୱପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଏବଂ ଆୟତନ କେତେ ?

9. ଗୋଟିଏ ଆୟତଘନର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 1168 ବର୍ଗ ମିଟର, ପାର୍ଶ୍ୱପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 720 ବର୍ଗ.ମିଟର ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା 12 ମି ହେଲେ, ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ପ୍ରସ୍ଥ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

10. ଗୋଟିଏ ଆୟତଘନାକାର ପାଣିକୁଣ୍ଡର ଭିତର ପାଖର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 10 ମି, ପ୍ରସ୍ଥ 8 ମି ଏବଂ ଗଭୀରତା 3 ମି. ହେଲେ, ଏହାର ଭିତର ପାଖରେ ସିମେଣ୍ଟ ଦେବା ଖର୍ଚ୍ଚ ବର୍ଗ ମିଟରକୁ ଟ 2.50 ଦରରେ କେତେ ଖର୍ଚ୍ଚ ହେବ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

11. ଗୋଟିଏ ଆୟତଘନର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 700 ବର୍ଗ ସେ.ମି., ଏହାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ପ୍ରସ୍ଥର ଦୁଇଗୁଣ ଓ ଉଚ୍ଚତା ପ୍ରସ୍ଥର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ହେଲେ ଆୟତଘନର ଘନଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

12. ଗୋଟିଏ ସମଘନର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଅନ୍ୟ ଦୁଇଟି ସମଘନର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ସମଷ୍ଟି ସଙ୍ଗେ ସମାନ । ଯଦି ଏହି ଦୁଇ ସମଘନର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 24 ମି ଓ 32 ମି ହୁଏ ତେବେ ପ୍ରଥମ ସମଘନର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

13. ଦୁଇଟି ସମଘନର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅନ୍ତର 1050 ବର୍ଗ ସେ.ମି. । ସମଘନ ଦ୍ୱୟର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତ 4 : 3 ହେଲେ, ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

14. ଗୋଟିଏ ଆୟତଘନର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ପ୍ରସ୍ଥ ଓ ଉଚ୍ଚତାର ଅନୁପାତ 6 : 5 : 4 ଏବଂ ଏହାର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 33300 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ହେଲେ, ଏହାର ଘନଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

15. 20 ମିଟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, 16 ମିଟର ପ୍ରସ୍ଥ ଓ 12 ମିଟର ଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ କୋଠରୀରେ ରଖାଯାଇଥିବା ଦୀର୍ଘତମ ଲୁହାଛଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କେତେ ? (ସୂଚନା : ରଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $= \sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$)

ମନେରଖ :

(i) ଆୟତଘନର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ପ୍ରସ୍ଥ ଓ ଉଚ୍ଚତା ଯଥାକ୍ରମେ a, b ଓ c ଏକକ ହେଲେ, ଆୟତଘନର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ ଏକକ

(ii) ସମଘନର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ a ଏକକ ହେଲେ, ସମଘନର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = $\sqrt{3}a$ ଏକକ

16. ଗୋଟିଏ ଆୟତଘନର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ପ୍ରସ୍ଥ ଓ ଉଚ୍ଚତାର ସମଷ୍ଟି 19 ସେ.ମି. ଏବଂ ଏହାର କର୍ଣ୍ଣ $5\sqrt{5}$ ସେ.ମି., ହେଲେ, ଏହାର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

17. ଦୁଇଟି ସମଘନର ଘନଫଳର ସମଷ୍ଟି 5824 ଘ.ସେ.ମି. । ସେମାନଙ୍କର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତ 3:4 ହେଲେ ପ୍ରତ୍ୟେକର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସ୍ଥିର କର ।

18. ତିନୋଟି ସମଘନର ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଯଥାକ୍ରମେ 9 ବ.ମି., 16 ବ.ମି. ଓ 25 ବ.ମି. । ଏହି ସମଘନତ୍ରୟର ଘନଫଳର ସମଷ୍ଟି ସଙ୍ଗେ ସମାନ ଘନଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଅନ୍ୟ ଏକ ସମଘନର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ଷଷ୍ଠ ଅଧ୍ୟାୟ

ଅଙ୍କନ

(CONSTRUCTION)

6.1. ଉପକ୍ରମଣିକା

ଜ୍ୟାମିତି ବିଷୟଟି ଗଣିତର ଏକ ମୁଖ୍ୟ ଅଂଗ । ଜ୍ୟାମିତିରେ ଉତ୍କର୍ଷତା ଲାଭ ଏବଂ ସର୍ବୋପରି ଗଣିତରେ ପାରଦର୍ଶିତା ପାଇଁ ଜ୍ୟାମିତିକ ଅଙ୍କନର ଆବଶ୍ୟକତା ଯଥେଷ୍ଟ ଅଧିକ । ଜ୍ୟାମିତିର ଅଙ୍କନ ପାଇଁ ଜ୍ୟାମିତି ବାକ୍ସରେ ଥିବା ଯନ୍ତ୍ରଗୁଡ଼ିକ ଯଥା : ସ୍କେଲ୍, କମ୍ପାସ, ଡିଭାଇଡର୍, ପ୍ରୋଟ୍ରାକ୍ଟର୍, ସେଟ୍‌ସ୍କୋୟାର୍ ଓ ପେନ୍‌ସିଲ୍‌ର ବ୍ୟବହାର କରାଯାଇଥାଏ । ଜ୍ୟାମିତିକ ଅଙ୍କନରେ ଉତ୍କର୍ଷତାର ବୃଦ୍ଧି ପାଇଁ ପ୍ରୋଟ୍ରାକ୍ଟର୍ ଓ ସେଟ୍‌ସ୍କୋୟାର୍ ବ୍ୟବହାରକୁ କ୍ରମେ କ୍ରମେ ବାଦ୍ ଦିଆଯାଏ ।

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ କେତେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ତ୍ରିଭୁଜର ଅଙ୍କନ ପାଇଁ କେବଳ ସ୍କେଲ୍ ଓ କମ୍ପାସ୍‌ର ବ୍ୟବହାର କରାଯିବ । ସ୍ମରଣ ରଖିବା ଉଚିତ୍ ଯେ ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଅଙ୍କନ ପାଇଁ ପରସ୍ପର ଅଣନିର୍ଭରଶୀଳ ତିନୋଟି ତଥ୍ୟ ଦତ୍ତ ଥିଲେ ତ୍ରିଭୁଜର ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ । ଯେଉଁ ତଥ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ନେଇ ତ୍ରିଭୁଜର ଅଙ୍କନ କରାଯିବ ସେଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ

(i) ଭୂମି, ଅନ୍ୟ ଦୁଇ ବାହୁର ସମଷ୍ଟି ଓ ଗୋଟିଏ ଭୂମି ସଂଲଗ୍ନ କୋଣ ।

(ii) ଭୂମି, ଅନ୍ୟ ଦୁଇବାହୁର ଅନ୍ତର ଓ ଗୋଟିଏ ଭୂମି ସଂଲଗ୍ନ କୋଣ ।

(iii) ତିନିବାହୁର ସମଷ୍ଟି ଓ ଦୁଇଟି ଭୂମି ସଂଲଗ୍ନ କୋଣ ।

(iv) ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି ବାହୁ ଓ ଗୋଟିଏ କୋଣ ।

(v) ଗୋଟିଏ ମଧ୍ୟମା ଓ ଅନ୍ୟ ଦୁଇଟି ତଥ୍ୟ ।

ଯେହେତୁ ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଗଠନ ପାଇଁ ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜର ଦରକାର ପଡ଼େ ତେଣୁ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଅଙ୍କନ ପାଇଁ ପରସ୍ପର ଆତ୍ମନିର୍ଭରଶୀଳ ପାଞ୍ଚଗୋଟି ତଥ୍ୟ ଆବଶ୍ୟକ । ଯେଉଁ ତଥ୍ୟକୁ ନେଇ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଅଙ୍କନ କରାଯିବ ସେଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ

(i) ଚାରିବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଗୋଟିଏ କୋଣ ।

(ii) ଚାରିବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ।

(iii) ତିନୋଟି ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଦୁଇଟି କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ।

(iv) ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ତିନୋଟି କୋଣ ।

ଏତଦ୍‌ଭିନ୍ନ ଚତୁର୍ଭୁଜକୁ ଅଙ୍କନ କରି ସାରିବା ପରେ ଏହାର ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜର ଅଙ୍କନ ମଧ୍ୟ କରାଯିବ । ସେହିପରି ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କରି ସାରି ଏହାର ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଆୟତଚିତ୍ରର ଅଙ୍କନ କରାଯିବ । ଅଧ୍ୟାୟର ଶେଷ ଭାଗରେ କେବଳ ସ୍କେଲ୍ ଓ କମ୍ପାସ୍ ବ୍ୟବହାର କରି କୌଣସି ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ କେତେକ ସର୍ବସମ ଅଂଶରେ ବିଭକ୍ତ କରିବାର

ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ ଦର୍ଶାଯାଇଛି । ଯେହେତୁ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ରେଖାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁ ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାକୁ ସୂଚାଏ ଏବଂ ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ ବିନ୍ଦୁସମୂହ ଓ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ R ମଧ୍ୟରେ ଏକ ଏକ ସମ୍ବନ୍ଧ ରହିଥାଏ, ପ୍ରତ୍ୟେକ ପରିମେୟ ଓ କେତେକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତି ପାଇଁ ରୁଲର (ଯେଉଁଥିରେ କେବଳ ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କରିହୁଏ) ଓ କମ୍ପାସ୍ (ଯେଉଁଥିରେ କେବଳ ବୃତ୍ତ ବା ଚାପ ଅଙ୍କନ କରିହୁଏ)ର ସାହାଯ୍ୟ ନିଆଯାଇଥାଏ । $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, 2+\sqrt{3}, 2\sqrt{2}$ ଆଦି ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}$ ପ୍ରଭୃତି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାକୁ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ ବିନ୍ଦୁ ରୂପେ ରୁଲର ଓ କମ୍ପାସ୍ ସାହାଯ୍ୟରେ ଚିହ୍ନିତ କରାଯାଇପାରିବ ।

ଏଠାରେ ସ୍ମରଣ କରାଇ ଦିଆଯାଉଛି ଯେ ରୁଲର ଓ କମ୍ପାସ୍ ଦ୍ୱାରା π, e, $1+\pi$ ଆଦି ସଂଖ୍ୟାକୁ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ରେଖାରେ ଚିହ୍ନିତ କରିବା ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ । ଏଠାରେ ଉଲ୍ଲେଖ ଯୋଗ୍ୟ ଯେ ନିମ୍ନରେ ଆଲୋଚିତ ଅଙ୍କନ ଗୁଡ଼ିକର ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ ଓ ଅଙ୍କନର ବିଶ୍ଳେଷଣ ଦିଆଯାଇଛି । ମାତ୍ର ଅନୁଶୀଳନୀରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ଅଙ୍କନ ଗୁଡ଼ିକର ସଂପାଦନ ପାଇଁ କେବଳ ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ ଏବଂ ବିଶ୍ଳେଷଣ ତଥା ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ ଇତ୍ୟାଦି ଲେଖିବା ଅନାବଶ୍ୟକ । ଅଧିକନ୍ତୁ ଯେଉଁ ପେନ୍‌ସିଲ୍‌ଟି ଅଙ୍କନରେ ବ୍ୟବହୃତ ହେବ ତାହାର ମୁନ ତୀକ୍ଷ୍ଣ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ । ମନେରଖ ଚାପଟି ଯେତିକି ଆବଶ୍ୟକ ସେତିକି ହିଁ କେବଳ ଅଙ୍କନ ହେବ ଓ ରେଖା ତଥା ଚାପ ଅତ୍ୟନ୍ତ ଗାଢ଼ ଭାବେ ଟଣାଯିବା ଉଚିତ୍ ନୁହେଁ ।

ଉପରଲିଖିତ ତ୍ରିଭୁଜ ଓ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ ନିମ୍ନରେ ଆଲୋଚିତ ହୋଇଛି ।

6.2 ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ (Construction of Triangles) :

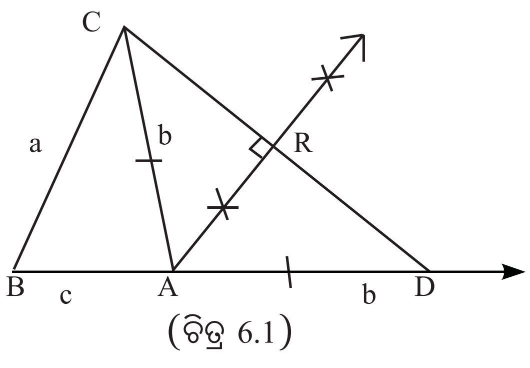
ଅଙ୍କନ- 1

କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ସେହି ବାହୁ ସଂଲଗ୍ନ କୋଣଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକର ପରିମାଣ ଓ ଅନ୍ୟ ଦୁଇବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି ଦତ୍ତ ଅଛି। ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ।

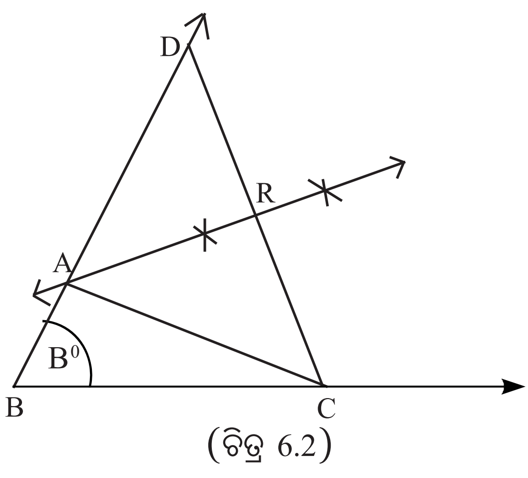
(To construct a triangle, given the length of one side, the measure of one of the angles adjacent to the same side and the sum of the lengths of the other two sides.)

ମନେକର Δ ABC ର BC = a ଏକକ, $m\angle ABC = B^0$, AC+AB = (b+c) ଏକକ ଦତ୍ତ ଅଛି। Δ ABC ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ ।

ବିଶ୍ଳେଷଣ : ଚିତ୍ର 6.1 ଦେଖ। $\overrightarrow{BA}$ ଉପରେ D ବିନ୍ଦୁ ନିଆଯାଉ ଯେପରି $AD=AC, \overline{CD}$ ଅଙ୍କନ କଲେ ΔCBD ମିଳିବ, ଯାହାର BD=(b+c)ଏକକ: ବର୍ତ୍ତମାନ Δ CBD ରେ, BC, BD ଓ $m\angle CBD$ ଦତ୍ତ । ଫଳରେ



(ଚିତ୍ର 6.1)



(ଚିତ୍ର 6.2)

Δ CBD ଅଙ୍କନ କରାଯାଇ ପାରିବ । Δ ACD ସମଦ୍ୱିବାହୁ ହୋଇ ଥିବାରୁ $\overline{CD}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ ଉପରେ A ବିନ୍ଦୁ ରହିବ।

ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ:

(i) ଏକ ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କରି ସେଥିରୁ a ଏକକ ପରିମିତ $\overline{BC}$ କାଟ।

(ii) $\overline{BC}$ ଉପରେ B ବିନ୍ଦୁରେ B^0 ପରିମିତ $\angle$CBD ଅଙ୍କନ କର।

(iii) $\overrightarrow{BD}$ ରୁ (b+c) ଏକକ ପରିମିତ $\overline{BD}$ କାଟ । $\overline{DC}$ ଅଙ୍କନ କର ।

(iv) ବର୍ତ୍ତମାନ $\overline{DC}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର। ତାହା $\overline{BD}$ କୁ ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ ତାହାହିଁ ହେବ A ବିନ୍ଦୁ। (କିମ୍ବା $\overline{DC}$ ର C ବିନ୍ଦୁରେ m$\angle$D = m$\angle$DCA ଅଙ୍କନ କର; $\overrightarrow{CA}$, $\overline{BD}$ କୁ ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ ତାହା ମଧ୍ୟ A ବିନ୍ଦୁ ହେବ ।)

(v) $\overline{AC}$ ଅଙ୍କନ କର । ବର୍ତ୍ତମାନ Δ ABC ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜ ।

ପ୍ରମାଣ: (ବିଶ୍ଳେଷଣରୁ ପ୍ରମାଣ ସୁସ୍ପଷ୍ଟ।)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 6(a)

1. Δ ABC ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର:

(i) a = 6.5 ସେ.ମି., m$\angle$B = 60^0, b+c = 10 ସେ.ମି. ଏବଂ b ଓ c ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପ କରି ଲେଖ ।

(ii) b= 5.5 ସେ.ମି., m$\angle$C= 60^0, c+a = 10.1 ସେ.ମି. ଏବଂ c ଓ a ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପ କରି ଲେଖ।

(iii) a = 6 ସେ.ମି., m$\angle$B= 60^0, AB + ଉଚ୍ଚତା AD = 11 ସେ.ମି.।

(iv) b = 5.7 ସେ.ମି., m$\angle$C=60^0, BC + ଉଚ୍ଚତା BE = 10.7 ସେ.ମି.।

(v) AB = AC, a = 6.2 ସେ.ମି., AC + ଉଚ୍ଚତା AD = 10 ସେ.ମି.।

(vi) m$\angle$B = 90^0, AB = BC ଓ AB + AC = 10.3 ସେ.ମି.।

(vii) m$\angle$B = 90^0, BC = 5.6 ସେ.ମି., AB+AC = 10.6 ସେ.ମି.।

2. ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଉଚ୍ଚତାର ସମଷ୍ଟି = 11 ସେ.ମି.।

ଅଙ୍କନ- 2

କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ସେହି ବାହୁ ସଂଲଗ୍ନ ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ ଓ ଅନ୍ୟ ଦୁଇବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନ୍ତର ଦତ୍ତ ଅଛି । ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ ।

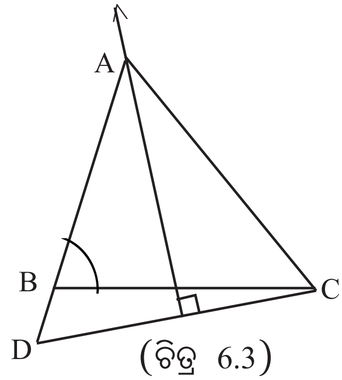
(To construct a triangle, given the length of one of the sides, the measure of one of the angles adjacent to the same side and the difference between the lengths of the other two sides.)

(I) ଚିତ୍ର 6.3 ରେ AC > AB ଅର୍ଥାତ୍ b > c

ମନେକର ΔABC ର BC = a ଏକକ, m$\angle$ABC = B^0, AC–AB = (b–c) ଏକକ ଦତ୍ତ ଅଛି। ΔABC ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ ।

ବିଶ୍ଳେଷଣ : ଚିତ୍ର 6.3 ଦେଖ। $\overrightarrow{AB}$ ଉପରେ D ବିନ୍ଦୁ ନିଆଯାଉ ଯେପରି BD = (b–c) ଏକକ; ତେବେ AD = b ଏକକ ହେବ ଏବଂ Δ ADCରେ AD = AC ହେବ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ΔBDCରେ ∠DBC, ∠ABCର ପରିପୂରକ ହେତୁ ଏହାର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ସମ୍ଭବ । ଫଳରେ BD, BC ଓ m∠DBC ଜ୍ଞାତ ଥିବାରୁ ΔDBC ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରିବ ।



(ଚିତ୍ର 6.3)

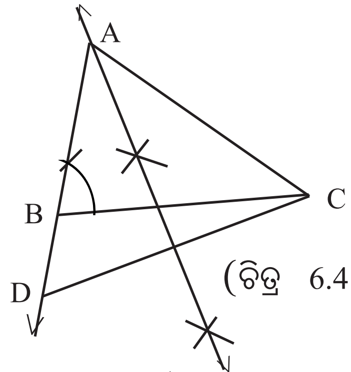
ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ:

(i) ଏକ ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କରି ତହିଁରୁ ଦତ୍ତ a ଏକକ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ $\overline{BC}$ କାଟ ।

(ii) $\overline{BC}$ ଉପରେ B ବିନ୍ଦୁରେ B^0 ପରିମିତ କୋଣ ଅଙ୍କନ କରି ଯେଉଁ ରଶ୍ମି ମିଳିଲା, ତାର ବିପରୀତ ରଶ୍ମି ଉପରେ D ବିନ୍ଦୁ ନିଅ ଯେପରି BD = (b – c) ଏକକ ହେବ ।

(iii) $\overline{CD}$ ଅଙ୍କନ କର। $\overline{CD}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର। ଏହା $\overrightarrow{DB}$ କୁ ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ, ସେ ବିନ୍ଦୁଟି ହେବ A ବିନ୍ଦୁ।

(iv) $\overline{AC}$ ଅଙ୍କନ କର। ΔABC ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜ ହେବ ।



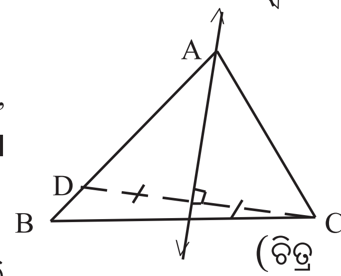
(ଚିତ୍ର 6.4)

ପ୍ରମାଣ : (ବିଶ୍ଳେଷଣରୁ ପ୍ରମାଣ ସୁସ୍ପଷ୍ଟ।)

(II) ଚିତ୍ର 6.5 ରେ (AB > AC)

ମନେକର Δ ABCରେ BC = a ଏକକ, m∠ABC = B^0, AB–AC = (c–b) ଏକକ ଦତ୍ତ ଅଛି। ΔABC ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ।

ବିଶ୍ଳେଷଣ-



(ଚିତ୍ର 6.5)

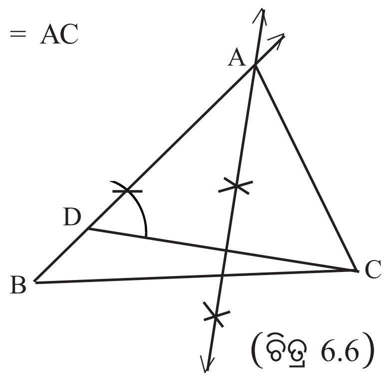
ଚିତ୍ର 6.5 ଦେଖ। $\overrightarrow{AB}$ ଉପରେ D ବିନ୍ଦୁ ଏପରି ନିଆଯାଉ ଯେପରି AD= AC ହେବ । $\overline{CD}$ ଅଙ୍କନ କଲେ BD = AB–AD = AB–AC ହେବ ।

ଅର୍ଥାତ୍ BD = (c–b) ଏକକ ହେବ । ଏଠାରେ Δ ADC ରେ AD = AC

ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ :

ଚିତ୍ର 6.6 ଦେଖ। (i) ଏକ ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କରି ତହିଁରୁ aଏକକ ପରିମିତ $\overline{BC}$ କାଟ।

(ii) $\overline{BC}$ ଉପରେ B ବିନ୍ଦୁରେ B^0 ପରିମିତ କୋଣ ଅଙ୍କନ କରି ଯେଉଁ ରଶ୍ମି ମିଳିଲା ତା ଉପରେ BD= (c–b) ଏକକ ଛେଦନ କର।



(ଚିତ୍ର 6.6)

(iii) $\overline{CD}$ ଅଙ୍କନ କର ।

(iv) $\overline{CD}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର। ତାହା $\overrightarrow{BD}$ କୁ ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ ତାହାର ନାମ A ଦିଅ।

(v) $\overline{AC}$ ଅଙ୍କନ କର। Δ ABC ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜ ହେବ।

ପ୍ରମାଣ : (ବିଶ୍ଳେଷଣରୁ ପ୍ରମାଣ ସୁସ୍ପଷ୍ଟ।)

ଅନୁଶୀଳନୀ- 6 (b)

1. Δ ABC ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର:

   (i) $a = 6$ ସେ.ମି., $m\angle C = 45^0$, $b–c = 1.5$ ସେ.ମି. ଏବଂ b ଓ c ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପ କରି ଲେଖ।

   (ii) $AB = 6.2$ ସେ.ମି.,$m\angle B = 45^0$, $a–b = 1.3$ସେ.ମି. ଏବଂ a ଓ b ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପ କରି ଲେଖ।।

   (iii) $a = 6.1$ ସେ.ମି., $m\angle C = 75^0$, $c–b = 1.4$ ସେ.ମି.ଏବଂ c ଓ b ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପ କରି ଲେଖ।।

   (iv) $B = 7$ ସେ.ମି., $m\angle A = 60^0$, $a–c = 1.4$ ସେ.ମି.ଏବଂ a ଓ c ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପ କରି ଲେଖ।।

   (v) $a = 7$ ସେ.ମି., $c–b = 1$ ସେ.ମି. ଏବଂ $m\angle B = 60^0$ ଓ b ଏବଂ c ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପ କରି ଲେଖ।।

2. ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର ଏକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ – ଉଚ୍ଚତା = 1 ସେ.ମି.।

3. ଏକ ସମକୋଣୀ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର କର୍ଣ୍ଣ ଓ ଏକ ସମାନ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନ୍ତର = 2 ସେ.ମି.।

4. Δ ABC ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର :

   (i) $AB = AC$, $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, $BC = 6$ ସେ.ମି. ଓ $AB–AD = 1$ ସେ.ମି.।

   (ii) $m\angle B = 90^0$, $BC = 6.6$ ସେ.ମି., $AC – AB = 2.3$ ସେ.ମି.।

   (iii) $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, $a = 6$ ସେ.ମି., $m\angle B=60^0$ ଓ $AB–AD=1$ ସେ.ମି.।

   (iv) $\overline{BE} \perp \overline{AC}$, $b = 5.8$ ସେ.ମି., $m\angle A=60^0$ ଓ $AB–BE =1$ ସେ.ମି.।

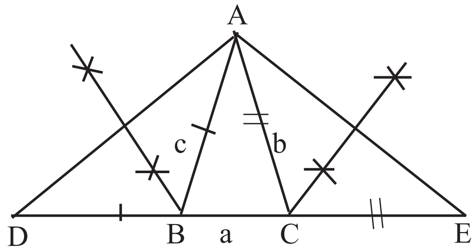
ଅଙ୍କନ-3

କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ପରିସୀମା ଓ ଦୁଇଟି କୋଣର ପରିମାଣ ଦତ୍ତ ଅଛି। ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କରବାକୁ ହେବ।

(To construct a triangle, given the perimeter and the measures of two angles)

ମନେକର, Δ ABC ରେ ପରିସୀମା = (a+b+c) ଏକକ, $m\angle B = B^0$, $m\angle C = C^0$ ଦତ୍ତ ଅଛି। ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ। ଏଠାରେ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ଓ $\overline{CA}$ ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ ଯଥାକ୍ରମେ c, a ଓ b ରୂପେ ସୂଚିତ କରାଯାଇଛି ।

ବିଶ୍ଳେଷଣ :



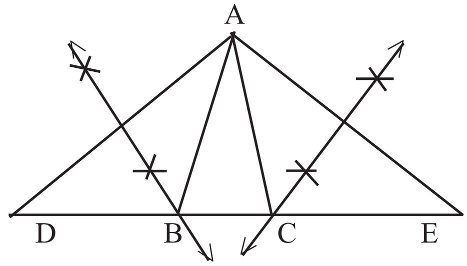
(ଚିତ୍ର 6.7)

$\overleftrightarrow{BC}$ ଉପରେ $AB = BD$ ଓ $AC = CE$ ନେଇ ଯଥାକ୍ରମେ D ଓ E ବିନ୍ଦୁ ସ୍ଥାପନ କଲେ, $DE = (a+b+c)$ ହେବ। $\overline{AD}$ ଓ $\overline{AE}$ ଅଙ୍କନ କଲେ $m\angle D = \frac{1}{2}B^0$ ଏବଂ $m\angle E = \frac{1}{2}C^0$ ହେବ । (କାରଣ କଣ ?)

ବର୍ତ୍ତମାନ Δ ADE ରେ DE, $m\angle D$ ଓ $m\angle E$ ଦତ୍ତ । ଫଳରେ Δ ADE ଅଙ୍କନ କରାଯାଇ ପାରିବ ।

Δ ABD ଏକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ। $\therefore$ $\overline{AD}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ B ବିନ୍ଦୁରେ $\overleftrightarrow{DE}$ କୁ ଛେଦ କରେ। ସେହିପରି $\overline{AE}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ $\overleftrightarrow{DE}$ କୁ C ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ।

ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ :



(ଚିତ୍ର 6.8)

(i) ଏକ ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କରି ତହିଁରୁ $\overline{DE}$ ଛେଦନ କର ଯେପରି DE = (a+b+c) ଏକକ ହେବ।

(ii) D ବିନ୍ଦୁରେ $\frac{1}{2}B^0$ ମାପରେ ∠ADE ଓ E ବିନ୍ଦୁରେ $\frac{1}{2}C^0$ ମାପରେ ∠AED ଅଙ୍କନ କର ।

(iii) $\overrightarrow{DA}$ ଓ $\overrightarrow{EA}$ ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁରେ ମିଳିତ ହେବେ ତାହାହିଁ A ବିନ୍ଦୁ ହେବ ।

(iv) $\overline{AD}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ $\overleftrightarrow{DE}$ କୁ ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ ତାହା B ହେବ । $\overline{AE}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ $\overleftrightarrow{DE}$ କୁ ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ, ତାହା C ହେବ ।

(v) $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ଅଙ୍କନ କର । ΔABC ହେବ ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜ।

ପ୍ରମାଣ : (ବିଶ୍ଳେଷଣରୁ ପ୍ରମାଣ ସୁସ୍ପଷ୍ଟ।)

ଅନୁଶୀଳନୀ- 6 (c)

1. ABC ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର :

   (i) a+b+c = 11 ସେ.ମି., m∠B = 60^0, m∠C = 75^0।

   (ii) a+b+c = 10.5 ସେ.ମି., m∠B = 105^0, m∠A = 45^0।

   (iii) m∠B = 90^0, AB = BC ଓ ପରିସୀମା =12 ସେ.ମି.।

   (iv) a = b, ପରିସୀମା = 10.7 ସେ.ମି. ଓ m∠A =75^0 ।

   (v) b = c, ପରିସୀମା = 12.5 ସେ.ମି. ଓ m∠A = 30^0।

2. ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର ପରିସୀମା = 11.3 ସେ.ମି.।

3. ଏକ ସମକୋଣୀ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର ପରିସୀମା 11.7 ସେ.ମି ।

ଅଙ୍କନ -4

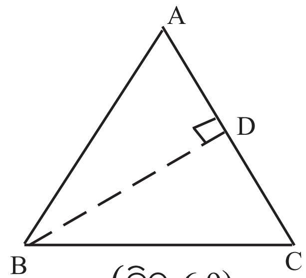
କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ ଦତ୍ତ ଅଛି। ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ।

(To construct a triangle, given the lengths of two sides and the measure of an angle.)

ଦୁଇବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ ପରିମାଣ ଦତ୍ତ ଥାଇ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କରିବା ପ୍ରଣାଳୀ ଅଷ୍ଟମ ଶ୍ରେଣୀରେ ଆଲୋଚିତ ହୋଇଅଛି । ଏଠାରେ ଦୁଇ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ କୋଣ ଦତ୍ତ ଥାଇ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ ଆଲୋଚନା କରାଯିବ ।

ମନେକର ΔABCରେ AB = c ଏକକ, BC = a ଏକକ, ଏବଂ m∠C = C^0 ଦତ୍ତ ଅଛି। ΔABC ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ ।

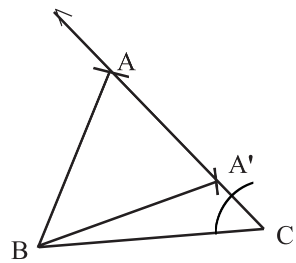
ବିଶ୍ଳେଷଣ :



(ଚିତ୍ର 6.9)

ଚିତ୍ର 6.9 ଦେଖ। ମନେକର $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ । BA < BD ହେଲେ Δ ABC ଅଙ୍କନ କରିବା ସମ୍ଭବ ହେବନାହିଁ । ପୁଣି BA = BD ହେଲେ, A ଓ D ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ମିଳିଯିବେ ଏବଂ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ΔABC ଅଙ୍କନ କରିବା ସମ୍ଭବ ହେବ । ପୁଣି ଏହା ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ହେବ ଏବଂ $\overline{BC}$ ତାର କର୍ଣ୍ଣହେବ। BA>BD ହେଲେ, ଦୁଇଟି Δ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରିବ ।

ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ :



(ଚିତ୍ର 6.10)

(i) ଏକ ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କରି ତହିଁରୁ a ଏକକ ପରିମିତ $\overline{BC}$ କାଟ ଓ C ବିନ୍ଦୁରେ C^0 ମାପ ବିଶିଷ୍ଟ କୋଣ ଅଙ୍କନ କର। ଚିତ୍ର 6.10 ଦେଖ।

(ii) B କୁ କେନ୍ଦ୍ରକରି BA = c ଏକକ ପରିମିତ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଚାପ ଅଙ୍କନ କର। ଏହି ଚାପ ∠C ର ଅନ୍ୟ ବାହୁକୁ ଯଦି ସ୍ପର୍ଶକରେ, ସ୍ପର୍ଶକ ବିନ୍ଦୁରେ ନାମ A ଦିଅ।

(iii) A, B ଯୋଗକଲେ ΔABC ମିଳିବ।

(iv) ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟକର ଏହି ଚାପ, ଉକ୍ତ କୋଣର ବାହୁକୁ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିଛି । ସେ ଦୁଇ ବିନ୍ଦୁର ନାମ A ଓ A' ଦିଅ। $\overline{BA}$ ଓ $\overline{BA'}$ ଅଙ୍କନ କଲେ, ଯଥାକ୍ରମେ ΔBCA ଓ ΔBCA' ମିଳିବ (ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କରି ଦେଖାଇବାକୁ ହେବ।) ଏହାକୁ ''ଦ୍ୱ୍ୟର୍ଥବୋଧକ ପରିସ୍ଥିତି'' (Ambiguous case) କୁହାଯାଏ । ଏହି ପରିସ୍ଥିତି ଉପୁଜେ ଯଦି AB < BC କିନ୍ତୁ BA > BD (AC ପ୍ରତି B ବିନ୍ଦୁରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ)

ପ୍ରମାଣ : ସୁସ୍ପଷ୍ଟ।

ଅନୁଶୀଳନୀ- 6 (d)

1. Δ ABC ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର -

(i) a=3.4 ସେ.ମି.,m∠C=30^0, c = 4.2 ସେ.ମି.। (ii) c=8 ସେ.ମି.,m∠A=60^0, a=6.9 ସେ.ମି.।

(iii) b= 8.5 ସେ.ମି., m∠C=45^0, c = 6ସେ.ମି.। (iv) a=8ସେ.ମି., m∠C=30^0, c = 4.2 ସେ.ମି.।

(v) a=8ସେ.ମି., m∠B=60^0, b = 7.1 ସେ.ମି. । (vi) c=8.3 ସେ.ମି., m∠A= 45^0, a = 6 ସେ.ମି.।

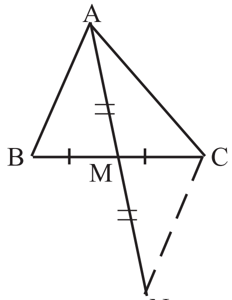
6.3 ମଧ୍ୟମା ଓ ଅନ୍ୟ ଅଂଶ ଦତ୍ତଥିବା ସ୍ଥଳେ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ :

ଅଙ୍କନ - 5

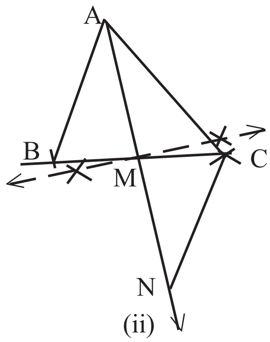
କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ତୃତୀୟ ବାହୁ ପ୍ରତି ମଧ୍ୟମାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଅଛି। ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ।

(To construct a triangle, given the lengths of two sides and length of the median to the third side of it.)

ଦତ୍ତ : ΔABC ରେ AB = c ଏକକ, AC=b ଏକକ ଓ $\overline{AM}$ ମଧ୍ୟମାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = x ଏକକ। ΔABC ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ ।



(i)



(ii)

(ଚିତ୍ର 6.11)

ବିଶ୍ଳେଷଣ: $\overrightarrow{AM}$ ଉପରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁ N ନିଅ, ଯେପରିକି AM = MN ହେବ । $\overline{NC}$ ଅଙ୍କନ କର। ବର୍ତ୍ତମାନ ΔABM ଓ ΔMNC ସର୍ବସମ ହେବ । (କାରଣ କ'ଣ ?)

∴ AB = NC ଏବଂ AN = 2AM ହେବ । ଫଳରେ ΔACN ର $\overline{AC}$, $\overline{NC}$ ଓ $\overline{AN}$ ବାହୁମାନଙ୍କ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଜାଣିହେବ ।

ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ: (i) କୌଣସି ଏକ ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କରି ଏଥିରୁ $\overline{AN}$ ଛେଦନ କର ଯେପରିକି AN = 2x ଏକକ ହେବ ।

(ii) A କୁ କେନ୍ଦ୍ରନେଇ ଓ b ଏକକ ($\overline{AC}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ) ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଚାପ କାଟ; N କୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି ଓ $\overline{NC}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ (=AB) c ଏକକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଚାପ କାଟ। ଚାପଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ C ହେବ ।

(iii) $\overline{AN}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ M ନିରୂପଣ କର। C ଓ M ର ସଂଯୋଜକ $\overrightarrow{CM}$ ଉପରେ B ବିନ୍ଦୁ ନିଅ ଯେପରିକି CM = MB ହେବ। ΔABC ଆବଶ୍ୟକ ତ୍ରିଭୁଜ ।

ପ୍ରମାଣ : (ବିଶ୍ଳେଷଣରୁ ସୁସ୍ପଷ୍ଟ)

ବିକଳ୍ପ ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ:

(i) କୌଣସି ଏକ ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କରି ସେଥିରୁ AN (ମଧ୍ୟମାର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଦୁଇଗୁଣ) ଅଂଶ ଛେଦନ କର।

(ii) A କୁ କେନ୍ଦ୍ର ଓ b ଏକକ ($\overline{AC}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ) ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଚାପ କାଟ; N କୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି $\overline{NC}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ (AB) c ଏକକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଚାପ କାଟ। ଚାପଦ୍ୱୟର ଛେଦ ବିନ୍ଦୁ C ହେବ ।

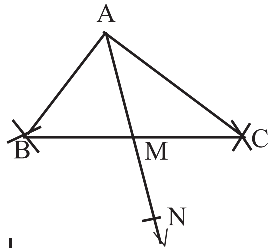
(iii) ସେହିପରି A କୁ କେନ୍ଦ୍ର ଓ c ଏକକ ($\overline{AB}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ) ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଚାପକାଟ; N କୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି $\overline{NB}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅର୍ଥାତ୍ b ଏକକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଚାପ କାଟ । ଚାପଦ୍ୱୟର ଛେଦ ବିନ୍ଦୁ, C ପାର୍ଶ୍ୱର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ରହିବ। ଛେଦ ବିନ୍ଦୁ B ହେବ ।

(iv) $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BC}$ ଅଙ୍କନ କର। Δ ABC ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜ।

ପ୍ରମାଣ: $\overline{BN}$ ଓ $\overline{CN}$ କୁ ଯୋଗ କଲେ ABNC ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ହେବ ।

$\overline{AN}$ ଓ $\overline{BC}$ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରିବେ ।

ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{AM}$ ମଧ୍ୟମା ହେବ ଯାହାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ଦତ୍ତ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସହ ସମାନ ହେବ ।



(ଚିତ୍ର 6.12)

ଅଙ୍କନ - 6

କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ସେହି ବାହୁ ସଂଲଗ୍ନ କୋଣଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକର ପରିମାଣ ଓ ଦତ୍ତ ବାହୁ ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ ଏକ ବାହୁ ପ୍ରତି ମଧ୍ୟମାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଅଛି । ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ ।

(To construct a triangle, given the length of one side, the measure of one of the angles adjacent to it and the length of the median drawn to one of the other two sides.)

ଦତ୍ତ : ମନେକର ΔABC ରେ $AB = c$ ଏକକ, $m\angle BAC = A^0$: ମଧ୍ୟମା $\overline{AM}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ$=x$ ଏକକ।

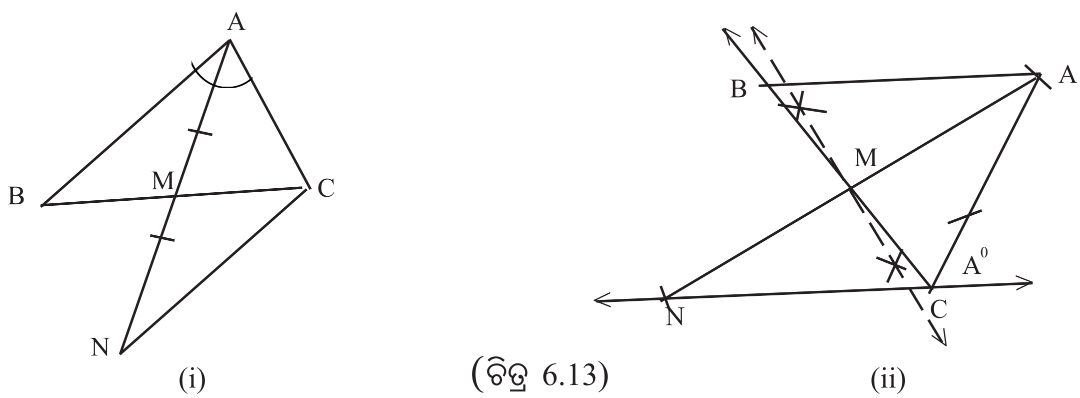
ବିଶ୍ଳେଷଣ : $\overline{AM}$ କୁ M ଦିଗରେ N ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବଢ଼ାଅ, ଯେପରିକି AM=MN ହେବ। N ଓ C କୁ ଯୋଗକର। ବର୍ତ୍ତମାନ ΔABM ଓ ΔMNC ସର୍ବସମ ହେବ। (କାରଣ କ'ଣ ?)

$\therefore$ $CN = AB$ ଏବଂ $m\angle BAM = m\angle MNC$ । ଫଳରେ $\overline{BA} \parallel \overline{NC}$; $\overline{AC}$ ଛେଦକ ।

ତେଣୁ $m\angle BAC + m\angle ACN = 180^0$ ବା $m\angle ACN = (180^0 - A)^0$

ବର୍ତ୍ତମାନ ΔACN ରେ–

$NC = AB = c$ ଏକକ, $AN = 2AM = 2x$ ଏକକ, $m\angle ACN = (180 - A)^0$



(ଚିତ୍ର 6.13)

ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ:

(i) କୌଣସି ଏକ ସରଳରେଖା ନେଇ ସେଥିରୁ $\overline{NC}$ ଛେଦନ କର ଯେପରିକି $NC = c$ ଏକକ ହେବ । $\overline{NC}$ ର C ବିନ୍ଦୁରେ $(180-A)^0$ କୋଣ ଅଙ୍କନ କର। N ବିନ୍ଦୁକୁ କେନ୍ଦ୍ରକରି ଓ $2x$ ଏକକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଚାପ କାଟ। ଏହା C ବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ ରଶ୍ମିକୁ A ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ। ΔANC ଅଙ୍କିତ ହେଲା।

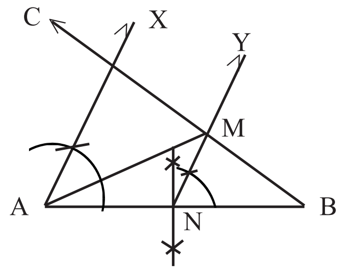
$\overline{AN}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ M ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର। $\overrightarrow{CM}$ ଅଙ୍କନ କର। M କୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି $\overline{CM}$ ସହ ସମାନ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଚାପ କାଟ। ଏହି ଚାପ ଯେଉଁଠି $\overrightarrow{CM}$ କୁ ଛେଦ କରିବ ତାହା B ହେବ। $\overline{AB}$ ଅଙ୍କନ କର ΔABC ମିଳିବ।

ବିକଳ୍ପ ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ:

(i) ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ $\overline{AB}$ ଅଙ୍କନ କର ।

(ii) A ବିନ୍ଦୁରେ ଦତ୍ତ ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ $\angle XAB$ ଅଙ୍କନ କର ।

(iii) $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ N ଚିହ୍ନଟ କର ଏବଂ N ବିନ୍ଦୁରେ $\overrightarrow{AX}$ ସହ ସମାନ୍ତର କରି $\overrightarrow{NY}$ ଅଙ୍କନ କର।



(ଚିତ୍ର 6.14)

(iv) A ବିନ୍ଦୁକୁ କେନ୍ଦ୍ରକରି AM (ଦତ୍ତ ମଧ୍ୟମାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ) ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ପରିମିତ ଚାପ, $\overrightarrow{NY}$ କୁ M ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ।

(v) $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{AX}$ କୁ C ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରୁ। ବର୍ତ୍ତମାନ ΔABC ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜ।

ପ୍ରମାଣ: $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ 'N'

$\overline{NM} \parallel \overline{AC}$ ହେତୁ M, $\overline{BC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ହେବ । ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{AM}$, ΔABC ର ମଧ୍ୟମା ହେବ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ– 6 (e)

1. ΔABC ରେ a = 6.0 ସେ.ମି., $\overline{AX}$ ମଧ୍ୟମାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ= 5.6 ସେ.ମି. ଓ $m\angle B=60^0$; ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କର।
2. ΔABC ରେ AB = 7.5 ସେ.ମି., AC= 6.5 ସେ.ମି. ଏବଂ ମଧ୍ୟମା $\overline{AX}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 6 ସେ.ମି.। ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କର।
3. ΔABC ରେ $m\angle A=60^0$, $\overline{AX}$ ମଧ୍ୟମାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ= 4.5 ସେ.ମି., AB=6 ସେ.ମି.; ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କର।
4. ΔABC ରେ AB=6.5 ସେ.ମି., $\overline{BY}$ ମଧ୍ୟମାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ=6 ସେ.ମି., BC=7 ସେ.ମି.; ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କର।
5. ΔABC ରେ c = 6.5ସେ.ମି., $\overline{CZ}$ ମଧ୍ୟମାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ=5.0 ସେ.ମି., a= 5.5 ସେ.ମି.; ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କର।
6. ΔABC ରେ AB = BC = 4ସେ.ମି., ମଧ୍ୟମା $\overline{AX}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 3 ସେ.ମି.; ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କର।
7. ΔABC ରେ AB = 5 ସେ.ମି., AC = 5.4 ସେ.ମି. ଓ ମଧ୍ୟମା $\overline{AX}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 3.5 ସେ.ମି.। ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କର।
8. ΔABC ରେ a = 9 ସେ.ମି., $m\angle B = 75^0$, $\overline{AX}$ ମଧ୍ୟମାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 8ସେ.ମି.; ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କର।
9. ΔABCରେ ଉଚ୍ଚତା = 4.5 ସେ.ମି., $\overline{AX}$ ମଧ୍ୟମାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ=5 ସେ.ମି., AB=6 ସେ.ମି.; ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କର।
10. Δ ABC ରେ ଉଚ୍ଚତା AD=6.6 ସେ.ମି., $m\angle B=60^0$, $\overline{AX}$ ମଧ୍ୟମାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 7 ସେ.ମି.; ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କର।

6.4 ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ (Construction of Quadrilaterals) :

କୌଣସି ଚତୁର୍ଭୁଜର ଚାରୋଟି ବାହୁ, ଚାରୋଟି କୋଣ ଓ ଦୁଇଟି କର୍ଣ୍ଣ ଥାଏ। ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ କେତେକ ସମ୍ବନ୍ଧ ଥିବାରୁ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଦଶଟି ଅଂଶ ମଧ୍ୟରୁ ପାଞ୍ଚଟି ଅଂଶ ନିରପେକ୍ଷ ଅଟେ । ତେଣୁ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ ପାଇଁ 5 ଟି ନିରପେକ୍ଷ ଅଂଶର ମାପ ଜଣାଥିବା ଆବଶ୍ୟକ ଏବଂ ସେଥିରୁ କର୍ଣ୍ଣ ଓ ବାହୁମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଅନ୍ତତଃ ଦୁଇଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଥିବା ଆବଶ୍ୟକ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୁପ, ଚାରିବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଏକ କୋଣର ପରିମାଣ ବା ଚାରିବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ କର୍ଣ୍ଣ ଦତ୍ତ ଥିଲେ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ। ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ତୁମେମାନେ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ ସହ ସୁପରିଚିତ। ବିଭିନ୍ନ ତଥ୍ୟ ସମ୍ବଳିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ କରିଛ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଆଉ କେତେକ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ ସହ ସୁପରିଚିତ ହେବା।

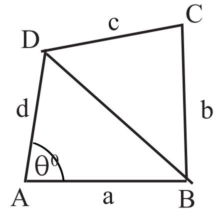
ଅଙ୍କନ - 7

କୌଣସି ଚତୁର୍ଭୁଜର ଚାରିବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ ଦତ୍ତ ଅଛି, ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ।

(To construct a quadrilateral, given the lengths of four sides and the measure of one angle.)

ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର AB = a ଏକକ, BC = b ଏକକ, CD = c ଏକକ, DA = d ଏକକ ଏବଂ $m\angle A = \theta^0$ ଦତ୍ତ ଅଛି, ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ ।

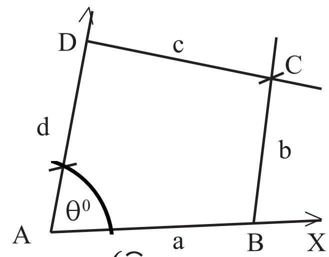
ବିଶ୍ଳେଷଣ :



(ଚିତ୍ର 6.15 (i))

$\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣ ଯୋଗକଲେ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜଟି Δ ABD ଓ Δ BDC ରେ ବିଭକ୍ତ ହେବ। ବର୍ତ୍ତମାନ ΔABDରେ AB, AD ଓ $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ ର ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣର ପରିମାଣ ଦତ୍ତ ହେତୁ ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କରିହେବ। ΔBDC ରେ BC ଓ CD ଦତ୍ତ ଅଛି ଏବଂ ΔABD ଅଙ୍କନ ପରେ BD ଜଣାପଡ଼ିବ । ତେଣୁ ΔBDC ବାହୁତ୍ରୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଜଣାପଡ଼ିବା ଯୋଗୁଁ ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କଲେ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଅଙ୍କନ ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ହେବ।

ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ :



(ଚିତ୍ର 6.15 (ii))

(i) a ଏକକ ପରିମିତ $\overline{AB}$ ଅଙ୍କନ କରି, A ବିନ୍ଦୁରେ θ^0 ମାପରେ $\angle$BAD ଅଙ୍କନ କର ।

(ii) B ଓ D କୁ କେନ୍ଦ୍ରକରି ଯଥାକ୍ରମେ b ଓ c ପରିମିତ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ $\overline{BD}$ ର A -ପାର୍ଶ୍ୱର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଦୁଇଟି ଚାପ ଅଙ୍କନ କର ଓ C ସେମାନଙ୍କର ଛେଦବିନ୍ଦୁ ହେଉ।

(iii) $\overline{BC}$ ଓ $\overline{CD}$ ଅଙ୍କନ କର । ବର୍ତ୍ତମାନ ABCD ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଚତୁର୍ଭୁଜ ହେବ ।

ପ୍ରମାଣ: (ବିଶ୍ଳେଷଣରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ)

ଉପରୋକ୍ତ ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ ବ୍ୟବହାର କରି ନିମ୍ନ ଅଙ୍କନମାନ କରିହେବ ।

(i) କୌଣସି ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ଦୁଇ ସନ୍ନିହିତ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ସେଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣର ପରିମାଣ ଦତ୍ତଅଛି । ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରଟି ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ ।

ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ବିପରୀତ ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ । ତେଣୁ ଉକ୍ତ ଚିତ୍ରଟିର ଚାରୋଟି ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ ଜଣାହେବା ଯୋଗୁଁ ଅଙ୍କନ-7 ଅନୁଯାୟୀ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରଟି ଅଙ୍କନ କରିହେବ ।

(ii) କୌଣସି ଆୟତଚିତ୍ରର ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଅଛି । ଆୟତ ଚିତ୍ରଟି ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ। ଆୟତ ଚିତ୍ରର ବିପରୀତ ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ଓ ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣର ପରିମାଣ 90^0 । ତେଣୁ ଅଙ୍କନ -7 ଅନୁସାରେ ଆୟତଚିତ୍ରଟି ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ ।

(iii) କୌଣସି ରମ୍ବସ୍‌ର ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ ଦତ୍ତ ଅଛି । ରମ୍ବସ୍‌ଟି ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ । କୌଣସି ରମ୍ବସ୍‌ର ସମସ୍ତ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ହେତୁ ଦତ୍ତ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟରୁ 4 ଟି ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଜାଣିହେବ ଓ ଏହାର ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ ଦତ୍ତ ଅଛି । ତେଣୁ ଅଙ୍କନ -7 ଅନୁସାରେ ରମ୍ବସ୍‌ଟି ଅଙ୍କିତ ହେବ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 6(f)

1. ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର -

    (i) AB = 2.7 ସେ.ମି., BC =3.5 ସେ.ମି., CD=6 ସେ.ମି., DA=4 ସେ.ମି. ଏବଂ $m\angle B = 90^0$

    (ii) AB=7.3 ସେ.ମି., BC = 6.9 ସେ.ମି., CD =5.8 ସେ.ମି., DA =8.2 ସେ.ମି. ଓ $m\angle C=45^0$

2. ABCD ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର -

    AB = 6ସେ.ମି., BC = 4ସେ.ମି. ଏବଂ $m\angle ABC =75^0$

3. ଏକ ରମ୍ବସ୍ ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ 120^0 ଓ ଏକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 5 ସେ.ମି.।

4. ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର-

    (i) ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 3.5 ସେ.ମି. । (ii) ପରିସୀମା = 16 ସେ.ମି. ।

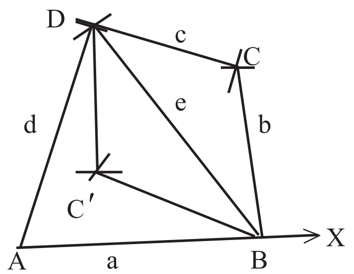
5. ABCD ଆୟତଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର -

    (i) AB= 6 ସେ.ମି. ଓ AD = 4 ସେ.ମି.। (ii) AC = 6.5 ସେ.ମି. ଓ AB = 5.2 ସେ.ମି. ।

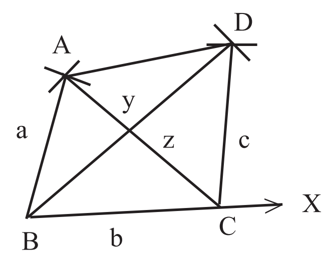
ଅଙ୍କନ - 8

କୌଣସି ଚତୁର୍ଭୁଜର ଚାରିବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଅଛି । ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ ।

(To construct a quadrilateral, given the lengths of four sides and length of one diagonal.)



ଚିତ୍ର 6.16



ଚିତ୍ର 6.17

ମନେକର ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର AB = a ଏକକ, BC = b ଏକକ, CD = c ଏକକ, DA = d ଏକକ ଓ $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = e ଏକକ ଦତ୍ତ ଅଛି । ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ ।

ବିଶ୍ଳେଷଣ :

ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣ ଅଙ୍କନ କଲେ ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ΔABD ଓ ΔBCD ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟରେ ବିଭକ୍ତ ହୁଏ । ΔABD ରେ AB, BD ଓ DA ଦତ୍ତ ହେତୁ ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କରିହେବ । ସେହିପରି ΔBCD ରେ BC, CD ଓ BD ଦତ୍ତ ହେତୁ ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କଲେ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଅଙ୍କନ ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ହେବ ।

ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ :

(i) $\overrightarrow{AX}$ ଅଙ୍କନ କରି ସେଥିରୁ a ଏକକ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ $\overline{AB}$ ଛେଦନ କର । (ଚିତ୍ର 6.16 ଦେଖ)

(ii) A ଓ B କୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି ଯଥାକ୍ରମେ d ଓ e ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ $\overline{AB}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଦୁଇଟି ଚାପ ଅଙ୍କନ କର ଏବଂ ସେମାନେ ପରସ୍ପରକୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତୁ । $\overline{AD}$ ଓ $\overline{BD}$ ଅଙ୍କନ କର ।

(iii) ପୁଣି B ଓ D ବିନ୍ଦୁକୁ କେନ୍ଦ୍ରକରି ଯଥାକ୍ରମେ b ଓ c ପରିମାଣ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଦୁଇଟି ଚାପ ଅଙ୍କନ କର ଏବଂ ସେମାନେ $\overline{BD}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ C ବିନ୍ଦୁରେ ଓ ଅପର ପାର୍ଶ୍ୱରେ C' ବିନ୍ଦୁରେ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରନ୍ତୁ। $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{BC'}$ ଓ $\overline{DC'}$ ଅଙ୍କନ କର ।

(iv) ବର୍ତ୍ତମାନ ABCD ବା ABC'D ପ୍ରତ୍ୟେକଟି ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଚତୁର୍ଭୁଜ ହେବ । ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜ ହେଉଥିଲା ବେଳେ ABC'D ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜ ନୁହେଁ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ : ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସାଧାରଣତଃ ଆମେ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ କରିଥାଉ । ଯଦି ଗୋଟିଏ ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ଦିଆଯାଏ, ତେବେ B ଓ D କୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି ଯଥାକ୍ରମେ b ଓ c ପରିମାଣ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ $\overline{BD}$ ର ଯେଉଁ ପାର୍ଶ୍ୱରେ A ଅବସ୍ଥିତ ତାହାର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଚାପଦ୍ୱୟ ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ ଏବଂ ସେମାନେ ପରସ୍ପରକୁ ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବେ ତାହା C ହେବ ।

ନିମ୍ନ ଅଙ୍କନଟି ଅଙ୍କନ - ୪ ର ଅନୁରୂପ ହେବ :

କୌଣସି ଚତୁର୍ଭୁଜରେ ତିନୋଟି ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଦୁଇଟି କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଅଛି । ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ ।

(To construct a qudrilateral, given the lengths of three sides and length of two diagonals.)

ମନେକର ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜରେ AB= a ଏକକ, BC = b ଏକକ, CD = c ଏକକ, AC= x ଏକକ ଓ BD = y ଏକକ ଦତ୍ତ ଅଛି । ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ । (ଚିତ୍ର.6.17 ଦେଖ ।)

ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ଦ୍ୱାରା ଯଥାକ୍ରମେ Δ ABC ଓ ΔBCD ଗଠିତ ହୁଅନ୍ତି । ଏହି ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟର ସମସ୍ତ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଥିବାରୁ ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟ ଅଙ୍କିତ ହୋଇପାରିବ । ଶେଷରେ A ଓ D ଯୋଗକଲେ ଆବଶ୍ୟକ ଚତୁର୍ଭୁଜ ABCD ମିଳିବ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 6(g)

1. ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର -

   (i) AB = 3 ସେ.ମି., BC = 3.8 ସେ.ମି., CD = 4.1 ସେ.ମି., AD= 3.4 ସେ.ମି. ଓ AC =4.9 ସେ.ମି.।

   (ii) AB= 3.2 ସେ.ମି., BC= 6.5 ସେ.ମି., CD= 4.7 ସେ.ମି., AC =.5.8 ସେ.ମି. ଓ BD = 4.1 ସେ.ମି.।

   (iii) AB = 8.2 ସେ.ମି., AD = 7.4 ସେ.ମି., BC =5 ସେ.ମି.,AC =8.4 ସେ.ମି. ଓ BD = 9 ସେ.ମି. ।

2. ଏକ ରମ୍ବସ୍ ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର ଏକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 6 ସେ.ମି ଓ ଏକ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ୪ ସେ.ମି. ।

3. ABCD ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର-

(i) AB = 3.7 ସେ.ମି., BC = 4 ସେ.ମି. ଓ AC = 6.1 ସେ.ମି. ।

(ii) AB = 6 ସେ.ମି., AC = 6 ସେ.ମି. ଓ BD = 8ସେ.ମି. ।

4. ଏକ ରମ୍ବସ୍ ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 4 ସେ.ମି. ଓ ଏହାର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣର ପରିମାଣ 60^0 ।

5. ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 5 ସେ.ମି.।

6. ଏକ ରମ୍ବସ୍ ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 5.6 ସେ.ମି. ଓ 7.4 ସେ.ମି. ।

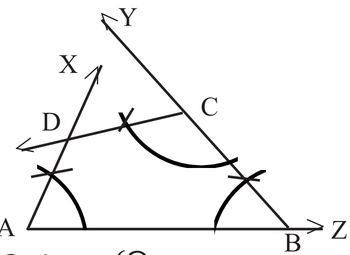
ଅଙ୍କନ - 9

କୌଣସି ଚତୁର୍ଭୁଜର ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ତିନୋଟି କୋଣର ପରିମାଣ ଦତ୍ତ ଅଛି । ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ ।

(To construct a quadrilateral, given the lengths of two adjacent sides and measures of three angles.)

(a) ମନେକର ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର AB = a ଏକକ, BC=b ଏକକ ଏବଂ m∠A, m∠B ଓ m∠C ଦତ୍ତ ଅଛି । ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ ।

ବିଶ୍ଳେଷଣ ଓ ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ :



(a) (i) a ଏକକ ପରିମିତି $\overline{AB}$ ଅଙ୍କନ କରି B ବିନ୍ଦୁରେ m∠B ପରିମିତ କୋଣ ଅଙ୍କନ କର।

(ii) $\overrightarrow{BY}$ ବାହୁରୁ b ଏକକ ଛେଦକଲେ ଚତୁର୍ଭୁଜର C କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁ ମିଳିବ ।

(ଚିତ୍ର 6.18)

(iii) $\overline{AB}$ ର A ବିନ୍ଦୁରେ ଓ C-ପାର୍ଶ୍ୱରେ m∠A ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ କୋଣ ଓ $\overline{BC}$ ର C ବିନ୍ଦୁରେ ଓ A - ପାର୍ଶ୍ୱରେ m∠C ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ କୋଣ ଅଙ୍କନ କଲେ ସେମାନଙ୍କର ବାହୁମାନ ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବେ ତାହା ହେବ D ଓ ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଚତୁର୍ଭୁଜ ABCD ମିଳିବ ।

(b) ଯଦି AB, BC, m∠B, m∠C ଓ m∠D ଦତ୍ତ ଥାଏ ତେବେ $m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360^0$ ହେତୁ m∠A ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିହେବ ଏବଂ ତତ୍‌ପରେ ଉପରୋକ୍ତ ପ୍ରଣାଳୀ ଅନୁସାରେ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କିତ ହେବ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 6(h)

1. ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର-

(i) AB =4 ସେ.ମି., BC=3 ସେ.ମି., $m\angle A=45^0$, $m\angle B=120^0$ ଓ $m\angle C = 60^0$।

(ii) AB= 7 ସେ.ମି., BC = 6 ସେ.ମି., $m\angle B =90^0$, $m\angle C = 60^0$ ଓ $m\angle D = 120^0$ ।

(iii) AB=5.2 ସେ.ମି., BC=3.9 ସେ.ମି., AD=4.2 ସେ.ମି., $m\angle A=120^0$ ଓ $m\angle B =90^0$ ।

(iv) AB = 2.5 ସେ.ମି., BC = 3.7 ସେ.ମି., CD = 4 ସେ.ମି., $m\angle B =120^0$ ଓ $m\angle C =90^0$।

2. ABCD ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍ ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, AB =8 ସେ.ମି., BC =6 ସେ.ମି., CD = 4 ସେ.ମି. ଓ $m\angle B = 60^0$ ।

3. ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର ଯାହର AB = 6 ସେ.ମି., BC = 5.5 ସେ.ମି., AC = 6.4 ସେ.ମି., BD = 7.1 ସେ.ମି., $m\angle DBC = 30^0$ ।

4. ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର ଯାହର AB = 5.5 ସେ.ମି., $m\angle B = 60^0$, BC = 6 ସେ.ମି, $m\angle ACD = 30^0$, $m\angle BAD = 105^0$

5. ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $(\overline{BP} \perp \overline{AC}, \overline{DQ} \perp \overline{AC})$ AC = 6.7 ସେ.ମି., AB = 5 ସେ.ମି., CD = 5.3 ସେ.ମି., BP = 4.8 ସେ.ମି., DQ = 5 ସେ.ମି. ଚର୍ତୁଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କର ।

6. ABCD ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍ ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, AB = 6 ସେ.ମି., BC= 4.5 ସେ.ମି., CD = 9 ସେ.ମି., DA= 5 ସେ.ମି. ।

7. ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର AB = CD = 4.5 ସେ.ମି., BC = 9 ସେ.ମି., $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, BC = 2 AD

6.5 ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ:

କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଉପପାଦ୍ୟ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ତୁମେ ପୂର୍ବରୁ ପଢିଛ । ସେ ସମସ୍ତର ପ୍ରୟୋଗାତ୍ମକ ଦିଗ ସହିତ ଏଠାରେ ପରିଚିତ ହେବା ।

ଏକା ଭୂମି ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏବଂ ସମାନ ଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ (ଅର୍ଥାତ୍ ଏକା ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ) ତ୍ରିଭୁଜଗୁଡ଼ିକର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମାନ । ଏହି ନିୟମ ବ୍ୟବହାର କରି ଆମେ କୌଣସି ଦତ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜ ବା ଚର୍ତୁଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସଙ୍ଗେ ସମାନ କରି ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କରିପାରିବା ।

ଅଙ୍କନ -10

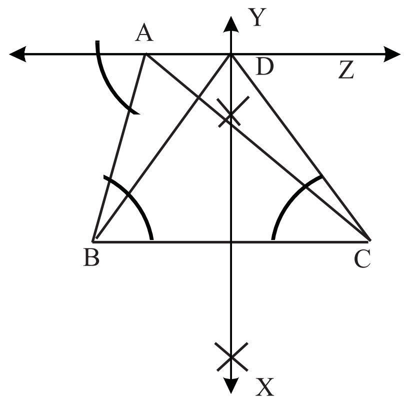
କୌଣସି ଦତ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜ ସହ ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ ।

(To draw an isosceles triangle equal in area to a given triangle.)

Δ ABC ଗୋଟିଏ ଦତ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜ । ଏହାର ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ।

ବିଶ୍ଲେଷଣ : A ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟଦେଇ $\overline{BC}$ ସହ ସମାନ୍ତର କରି $\overleftrightarrow{AZ}$ ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କର । $\overleftrightarrow{AZ}$ ଉପରିସ୍ଥ D ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ Δ ABC ଓ Δ DBC କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମାନ ହେବ, କାରଣ ସେମାନେ ଏକା ଭୂମି $\overline{BC}$ ଉପରେ ଓ ଏକା ସମାନ୍ତର ରେଖା ମଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ । ବର୍ତ୍ତମାନ Δ DBC ଏକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ହେବା ପାଇଁ D ବିନ୍ଦୁ ଟି $\overline{BC}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ । ତେଣୁ $\overline{BC}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ $\overleftrightarrow{AZ}$ କୁ ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ ତାହା D ବିନ୍ଦୁ ହେବ ଓ ΔDBC ଆବଶ୍ୟକ ତ୍ରିଭୁଜ ହେବ ।

ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ :



(i) ΔABC ଅଙ୍କନ କର ।

(ii) ତତ୍‌ପରେ A ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟଦେଇ $\overline{BC}$ ସଂଗେ ସମାନ୍ତର କରି $\overleftrightarrow{AZ}$ ଅଙ୍କନ କର ।

(iii) $\overline{BC}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ $\overleftrightarrow{XY}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ତାହା $\overleftrightarrow{AZ}$ କୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ ।

(iv) $\overline{DB}$ ଓ $\overline{DC}$ ଅଙ୍କନ କର । ΔDBC ଆବଶ୍ୟକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ।

(ଚିତ୍ର 6.19)

ପ୍ରମାଣ : $\overleftrightarrow{DX}$, $\overline{BC}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ. $\Rightarrow DB = DC$, ଅର୍ଥାତ୍ ΔDBC ଏକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ।

ପୁଣି $\because$ $\overleftrightarrow{AZ} \parallel \overline{BC}$ ଏବଂ ΔABC ଓ ΔDBC ଏକ ଭୂମି $\overline{BC}$ ଉପରେ ଏବଂ ଏକା ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା $\overleftrightarrow{AZ}$ ଓ $\overline{BC}$ ମଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

$\therefore \Delta DBC$ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \Delta ABC$ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ : (i) ଏହି ଅଙ୍କନରେ $\overline{BC}$ କୁ ଭୂମି ନେଇ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇଛି । $\overline{AB}$ ବା $\overline{AC}$ କୁ ଭୂମି ନେଇ ମଧ୍ୟ ଆବଶ୍ୟକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ Δ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରିବ ।

(ii) ସମଦ୍ୱିବାହୁ Δର ଭୂମିକୁ ଅପରିବର୍ତ୍ତିତ ରଖି ଉଚ୍ଚତାକୁ 2 ଗୁଣ ବା 3 ଗୁଣ ଇତ୍ୟାଦି ନେଇ ମୂଳ ତ୍ରିଭୁଜର ସେତିକି ଗୁଣ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜମାନ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରେ ।

ଅଙ୍କନ - 11

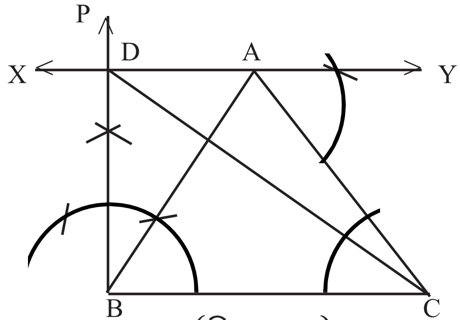
ଦତ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜ ସହ ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କରାଯିବ ।

(To draw a right angled triangle equal in area to a given triangle.)

ବିଶ୍ଳେଷଣ :

$\overline{BC}$ ସହ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା $\overleftrightarrow{AY}$ ଉପରିସ୍ଥ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ D ହେଲେ ΔDBC ଓ ΔABCର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମାନ । ΔDBC ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ହେବାପାଇଁ D ବିନ୍ଦୁଟି, B କିମ୍ବା C ଠାରେ $\overline{BC}$ ଉପରେ ଅଙ୍କିତ ସମକୋଣ ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ । ତେଣୁ $\overline{BC}$ ସହ B (କିମ୍ବା C) ଠାରେ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ $\overleftrightarrow{AY}$ କୁ ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ ତାହା D ବିନ୍ଦୁ ହେବ ଓ ΔDBC ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜ ହେବ ।

ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ :



(ଚିତ୍ର 6.20)

(i) ΔABC ଅଙ୍କନ କର ।

(ii) A ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟ ଦେଇ $\overline{BC}$ ସହ ସମାନ୍ତର $\overleftrightarrow{XY}$ ଅଙ୍କନ କର ।

(iii) B ଠାରେ $\overline{BC}$ ପ୍ରତି $\overline{BP}$ ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର ।

ଏହା $\overleftrightarrow{XY}$ କୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ ।

(iv) $\overline{DC}$ ଅଙ୍କନ କର । ΔDBC ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜ ।

ପ୍ରମାଣ : ଅଙ୍କନ ଅନୁସାରେ $\angle DBC$ ଏକ ସମକୋଣ । ପୁଣି ΔABC ଓ ΔDBC ଏକ ଭୂମି $\overline{BC}$ ଉପରେ ଏବଂ ଏକ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା $\overline{BC}$ ଓ $\overleftrightarrow{XY}$ ମଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ ହୋଇଥିବାରୁ ΔDBC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ΔABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ।

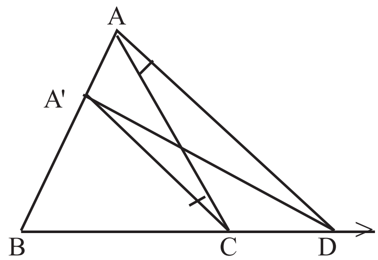
ମନ୍ତବ୍ୟ - ΔABC ର ଦୁଇଗୁଣ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେଲେ, ତାହାର ଉଚ୍ଚତା $EB = 2DB$ ନେଇ EC ଅଙ୍କନ କଲେ ΔEBCର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $2 \times \Delta ABC$ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ହେବ ।

ଅଙ୍କନ - 12

ଏକ ଦତ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରି ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଅନ୍ୟ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ ।

(To construct a triangle in to another triangle of equal area by changing the length of the base)

ବିଶ୍ଳେଷଣ ଓ ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ :



(ଚିତ୍ର 6.21)

ΔABC ର $\overrightarrow{BC}$ ଉପରିସ୍ଥ D ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଯେପରିକି B-C-D । ଏଠାରେ $BD > BC$ । ଆମକୁ $\overline{BD}$ ଉପରେ $\Delta A'BD$ ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ, ଯାହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ΔABC ର ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସହ ସମାନ ହେବ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ନୂତନ ତ୍ରିଭୁଜଟି ΔABC ର ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ହେବାକୁ ହେଲେ, A' ବିନ୍ଦୁର ଅବସ୍ଥିତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ହେବ ।

(i) $\overline{AD}$ ଅଙ୍କନ କର ।

(ii) C ବିନ୍ଦୁରେ $\overline{AD}$ ସହ ସମାନ୍ତର ଅଙ୍କନ କରି $\overline{CA'}$ ଅଙ୍କନ କର ଯାହା $\overline{AB}$ କୁ A' ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ ।

(iii) $\overline{A'D}$ ଅଙ୍କନ କର । ବର୍ତ୍ତମାନ $\Delta A'BD$ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଦତ୍ତ ΔABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସହ ସମାନ ହେବ ।

ପ୍ରମାଣ : $\Delta AA'C$ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\Delta A'CD$ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

($\because$ ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟ $\overline{A'C}$ ଏକ ଭୂମି ବିଶିଷ୍ଟ ଏବଂ $\overline{AD}$ ଓ $\overline{A'C}$ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା ମଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ)

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ $\Delta A'BC$ ଯୋଗ କଲେ ପାଇବା, ΔABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\Delta A'BD$ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ΔABC ର $\overline{BC}$ ଉପରିସ୍ଥ D ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ନେଇ ପାରିବା ଯେପରିକି B-D-C ହେବ । ଏଠାରେ $BD < BC$ ହେବ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ $\overline{BD}$ ଉପରେ ΔABC ର ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ $\Delta A'BD$ ଅଙ୍କନ କରିପାରିବା ।

ଅଙ୍କନ - 13

ଏକ ଦତ୍ତ ଚତୁର୍ଭୁଜର ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ ।

(To draw a triangle equal in area to a given quadrilateral.)

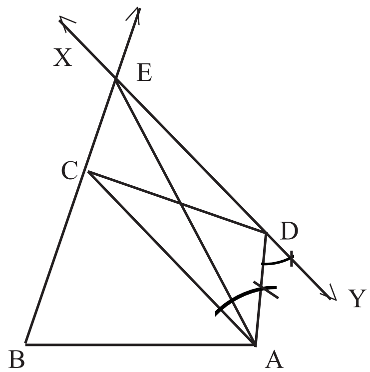
ABCD ଏକ ଦତ୍ତ ଚତୁର୍ଭୁଜ । ଏହାର ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ ।

ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ : (i) $\overline{AC}$ କର୍ଣ୍ଣ ଅଙ୍କନ କର ।

(ii) D ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ $\overline{AC}$ ସମାନ୍ତର କରି $\overleftrightarrow{XY}$ ଅଙ୍କନ କର । ତାହା $\overrightarrow{BC}$କୁ E ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ ।

(iii) A, E କୁ ଯୋଗକର ।

(iv) ΔABE ଆବଶ୍ୟକ ତ୍ରିଭୁଜ ।



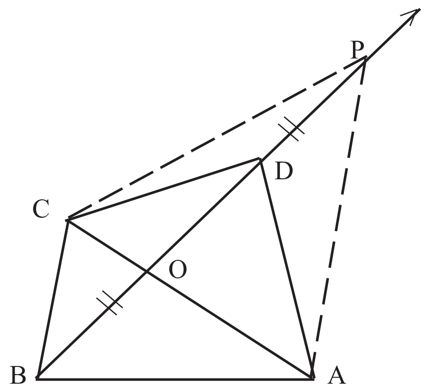
(ଚିତ୍ର 6.22)

ପ୍ରମାଣ : ଅଙ୍କନ ଅନୁଯାୟୀ $\overline{AC} \parallel \overleftrightarrow{XY}$, ΔACD ଓ ΔACE ଏକା ଭୂମି $\overline{AC}$ ଉପରେ ଏବଂ $\overline{AC}$ ଓ $\overleftrightarrow{XY}$ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ,

$\therefore \Delta ACD$ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ΔACE ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ΔABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଯୋଗକଲେ, ΔACD ଓ ΔPBC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ସମଷ୍ଟି = ΔACE ଓ ΔABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ସମଷ୍ଟି ଅର୍ଥାତ୍, ଚତୁର୍ଭୁଜ ABCD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ΔABE ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣ ଅଙ୍କନ କରି ମଧ୍ୟ ଆବଶ୍ୟକ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କରିହେବ ।



(ଚିତ୍ର 6.23)

ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ :

(i) କର୍ଣ୍ଣ $\overline{CA}$ ଓ $\overline{BD}$ ଅଙ୍କନ କର ଓ ଛେଦବିନ୍ଦୁର ନାମ ଦିଅ O $\overrightarrow{BD}$ ଅଙ୍କନ କର ।(ଚିତ୍ର 6.23 ଦେଖ)

(ii) D କୁ କେନ୍ଦ୍ର ନେଇ BO ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧବିଶିଷ୍ଟ ଚାପ ଅଙ୍କନ କର ଏବଂ ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁରେ ଉକ୍ତ ଚାପ $\overrightarrow{BD}$କୁ ଛେଦ କରିବ ତାର ନାମ ଦିଅ P । (iii) $\overline{PC}$ ଓ $\overline{PA}$ ଅଙ୍କନ କର । (iv) ବର୍ତ୍ତମାନ ଆବଶ୍ୟକ ତ୍ରିଭୁଜ ହେଉଛି ΔPCA ।

ପ୍ରମାଣ : Δ BOC ଏବଂ Δ DPC ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ

[$\because$ ଭୂମି BO=DP ଏବଂ ଉଭୟ ସମଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ

ସେହିପରି ΔBOA ଏବଂ ΔDPA ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ]

$\therefore$ ΔCDA, ΔBOC ଓ ΔBOA ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ସମଷ୍ଟି = ΔCDA, ΔDPC ଓ ΔDPA ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ସମଷ୍ଟି $\Rightarrow$ ଚତୁର୍ଭୁଜ ABCD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = Δ PCA ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 6(i)

1. ΔABC ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର BC= 5.8 ସେ.ମି., $m\angle B = 60^0$ ଓ $\overline{AD}$ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 4.2 ସେ.ମି. । ଏହାର ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର ।
2. ΔABC ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର BC=5.4 ସେ.ମି. $m\angle B=60^0$, $m\angle A=75^0$ । ଏହାର ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର । ଭୂମି $\overline{BD}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 6.3 ସେ.ମି. ନେଇ (ଯେପରିକି B-C-D) $\overline{BD}$ ଉପରେ ΔABC ର ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ΔA'BD ଅଙ୍କନ କର ।
3. ΔABC ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର A ରୁ $\overline{BC}$ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 6.7 ସେ.ମି., $m\angle B=60^0$ ଓ $m\angle C=45^0$ । ଏହାର ଅର୍ଦ୍ଧେକ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର ।
4. ΔABC ରେ $m\angle B=60^0$, $\overline{AX}$ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 4.9 ସେ.ମି. ଓ $m\angle A=45^0$; ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନକରି ତାର ଦୁଇଗୁଣ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର ।
5. ΔABC ରେ BC=6.5 ସେ.ମି., b+c=10 ସେ.ମି. ଓ $m\angle B = 60^0$ । ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କରି ଏହାର ଦୁଇଗୁଣ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର ।
6. ΔABC ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର $m\angle A = 60^0$, a = 7 ସେ.ମି. ଓ b – c = 4 ସେ.ମି.। ଏହାର ଅର୍ଦ୍ଧେକ କ୍ଷେତ୍ରଫଳବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର ।
7. Δ ABC ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର AC – AB = 2 ସେ.ମି., $m\angle B = 60^0$ ଏବଂ BC = 7 ସେ.ମି. । ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଦୁଇଗୁଣ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର ।
8. ΔABC ର BC = 5.4 ସେ.ମି., b + c = 8.7 ସେ.ମି. ଓ $m\angle A = 60^0$ । ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କରି ଏହାର ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର ।
9. ΔABC ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଭୂମି $\overline{BC}$ ଓ A ବିନ୍ଦୁରୁ $\overline{BC}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ $\overline{AD}$ । BC=5.6 ସେ.ମି. ଓ AC – AD =3 ସେ.ମି. ନେଇ Δ ABC ଅଙ୍କନ କର ଏବଂ ଏହାର ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର ।
10. ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିସୀମା 12 ସେ.ମି. । ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କରି ତାହାର ସମକୋଣ ସଂଲଗ୍ନ ଯେ କୌଣସି ବାହୁ ଉପରେ ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର ।

11. ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର AB = 5 ସେ.ମି., AC = 7.2 ସେ.ମି., AD= 6 ସେ.ମି., BC=6.2 ସେ.ମି. ଓ CD=5.4 ସେ.ମି. । ଏହାର ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର ।

12. ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର ଯେପରି AB=5ସେ.ମି., BC =7 ସେ.ମି., CD=9 ସେ.ମି., DA=10 ସେ.ମି. ଏବଂ $m\angle ABC=120^0$ ।

(i) ଚତୁର୍ଭୁଜର ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ΔPBC ଅଙ୍କନ କର ।

(ii) ଉପରୋକ୍ତ ମାପ ନେଇ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଭିନ୍ନ ଏକ ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ଓ ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ΔBDP ଅଙ୍କନ କର । (**ସୂଚନା:** ଅଙ୍କନ- 11 ରେ ଥିବା ବିପକ୍ଷ ପ୍ରଣାଳୀ ପ୍ରୟୋଗ କର ।)

6.6 ତ୍ରିଭୁଜର ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ଅଙ୍କନ :

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ ଏକା ଭୂମି ଏବଂ ଏକା ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଗୋଟିଏ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ଅବସ୍ଥିତ ହେଲେ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ହେବ ।

ଗୋଟିଏ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ × ଉଚ୍ଚତା

ତେଣୁ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}\times$ ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ × ଉଚ୍ଚତା

ତ୍ରିଭୁଜର ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ= ($\frac{1}{2}\times$ତ୍ରିଭୁଜର ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ)× ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତା

= ତ୍ରିଭୁଜର ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ × ($\frac{1}{2}\times$ ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତା)

ଏଣୁ କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେଲେ-

(କ) ତ୍ରିଭୁଜର ଭୂମି (ଅର୍ଥାତ୍ ଗୋଟିଏ ବାହୁ) ସଂଗେ ସମାନ ଭୂମି ବିଶିଷ୍ଟ ଓ ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତାର ଅଧାଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ । ଅଥବା

(ଖ) ତ୍ରିଭୁଜର ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ପରିମାଣ ଭୂମି ବିଶିଷ୍ଟ ଏବଂ ତାର ଉଚ୍ଚତା ସଂଗେ ସମାନ ଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ ।

ଅଙ୍କନ - 14

କୌଣସି ଦତ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜ ସହ ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ ।

(To draw a rectangle equal in area to a given triangle.)

ΔABC ଏକ ଦତ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜ । ଏହାର ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ ।

ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ (1) :

(i) ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ A ରୁ $\overline{BC}$ ଭୂମି ପ୍ରତି $\overline{AD}$ ଲମ୍ବ (ଉଚ୍ଚତା) ଟାଣ । $\overline{AD}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ $\overleftrightarrow{XY}$ ଅଙ୍କନ କର ।

(ii) B ଠାରେ $\overline{BC}$ ପ୍ରତି $\overrightarrow{BP}$ ଲମ୍ବ ଉତ୍ତୋଳନ କର । ତାହା $\overleftrightarrow{XY}$ କୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ ।

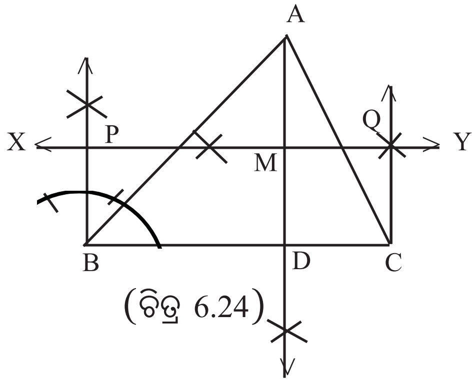
(iii) $\overleftrightarrow{XY}$ ରୁ $\overline{BC}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସଂଗେ ସମାନ କରି PQ ଅଂଶ ଛେଦନ କର । Q, C କୁ ଯୋଗକର ।

PQCQ ଆବଶ୍ୟକ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର, ଯାହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ΔABC ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସଂଗେ ସମାନ ।

ପ୍ରମାଣ : PBCQ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$= BC \times PB = BC \times MD$ [$\because$ PB = MD]

$= BC \times \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} \times BC \times AD = \Delta ABC$ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ



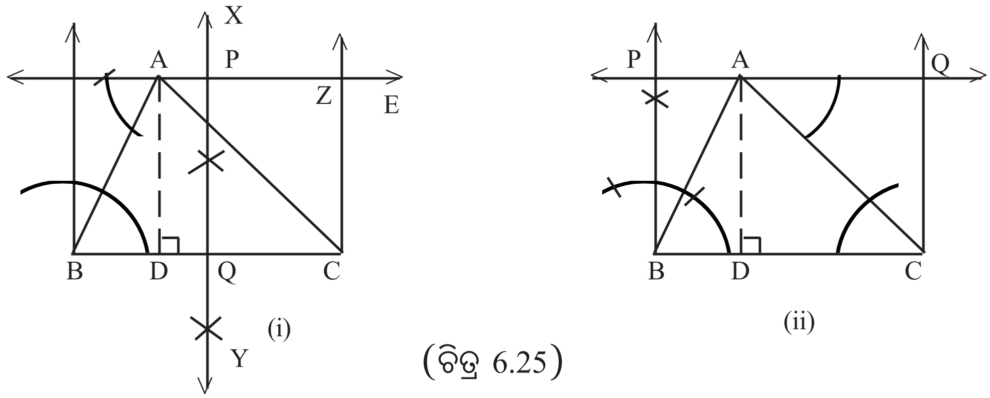
(ଚିତ୍ର 6.24)

ସୂଚନା : (i) $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ସେମାନଙ୍କୁ ଯୋଗକରି $\overleftrightarrow{XY}$ ସରଳରେଖା ମଧ୍ୟ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରେ ।

(ii) $\overline{AD}$ ର ଲମ୍ବ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overleftrightarrow{XY}$ ଅଙ୍କନ କରି ଏବଂ B ଓ C ବିନ୍ଦୁରୁ $\overline{BC}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କରି ମଧ୍ୟ ଏହି ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରେ ।

ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ (2) :

$\overline{BC}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ $\overleftrightarrow{XY}$ ଅଙ୍କନ କର; ତାହା $\overline{BC}$ କୁ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ । A ମଧ୍ୟଦେଇ $\overline{BC}$ ସଙ୍ଗେ ସମାନ୍ତର କରି $\overleftrightarrow{AE}$ ଅଙ୍କନ କର; ତାହା $\overline{XY}$ କୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ । $\overleftrightarrow{AE}$ ରୁ QC ସଙ୍ଗେ ସମାନ କରି $\overline{PZ}$ ଅଂଶ ଛେଦନ କର ।



(ଚିତ୍ର 6.25)

PQCZ ଆବଶ୍ୟକ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର, ଯାହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ΔABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସଙ୍ଗେ ସମାନ । ଚିତ୍ର 6.25(i)କୁ ଦେଖ ।

ପ୍ରମାଣ : PQCZ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= QC \times PQ = \frac{1}{2} BC \times AD$ ($\because PQ = AD$)

$= \Delta ABC$ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

ମନ୍ତବ୍ୟ : ଏହି ଅଙ୍କନରେ PQCZ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = ΔABC ର ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ଏବଂ PQCZ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ଉଚ୍ଚତା = Δ ABC ର ଉଚ୍ଚତା [PQCZ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ= QC.PQ $= \frac{1}{2}$ BC.PQ $= \frac{1}{2}$ BC.AD = Δ ABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ]

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : ଦତ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର ଭୂମି ଓ ଉଚ୍ଚତା ସଙ୍ଗେ ଯଥାକ୍ରମେ ସମାନ ଭୂମି ଓ ଉଚ୍ଚତା ନେଇ ଦତ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଗୁଣ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରେ ।

[ଚିତ୍ର 6.25 (ii)] ରେ PBCQ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ, ΔABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଦୁଇଗୁଣ ।

[$\because$ PBCQ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= BC \times BP = BC \times AD$

$= 2(\frac{1}{2}\ BC \times AD) = 2 \times \Delta ABC$ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ]

ଅନୁଶୀଳନୀ - 6 (j)

1. ΔABC ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର $AB = 8$ ସେ.ମି., $AC = 4$ ସେ.ମି. ଓ $BC = 6$ ସେ.ମି. । $\overline{BC}$ ଉପରେ ତ୍ରିଭୁଜର ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ।

2. ΔABCର $AB = 5$ ସେ.ମି., $AC = 4$ ସେ.ମି., $m\angle A = 60^0$, ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କରି $\overline{BC}$ ଉପରେ ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ।

3. ΔABC ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର $a+b+c = 8.5$ ସେ.ମି., $m\angle B = 60^0$ ଏବଂ $m\angle C = 90^0$ । ଏହାର ଦୁଇଗୁଣ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ।

4. ΔABC ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର $AB–AC = 1.5$ ସେ.ମି., $BC = 6.3$ ସେ.ମି., $m\angle B = 45^0$ । ଏହାର ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ।

ଅଙ୍କନ - 15

6.7 ରେଖାଖଣ୍ଡ ବିଭାଜନ:

କୌଣସି ଦତ୍ତ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ କେତେକ ସର୍ବସମ ଅଂଶରେ ବିଭକ୍ତ କରିବାକୁ ହେବ ।

(To divide a given line-segment into any number of congruent parts.)

$\overline{AB}$ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ରେଖାଖଣ୍ଡ। ଏହାକୁ କେତେକ ଅଂଶରେ (ମନେକର 5 ଟି ସର୍ବସମ ଅଂଶରେ) ବିଭକ୍ତ କରିବାକୁ ହେବ ।

ପ୍ରଥମ ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ:

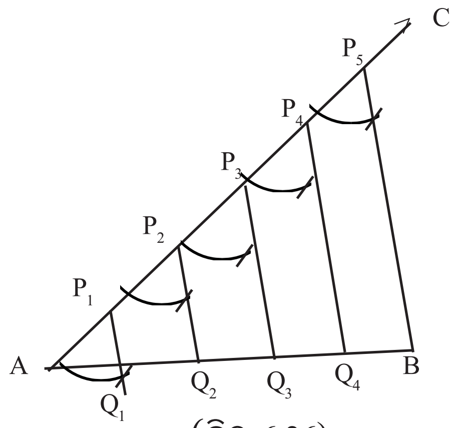
(i) A ବିନ୍ଦୁରେ $\overline{AB}$ ସହ ଯେ କୌଣସି ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ କରୁଥିବା $\overrightarrow{AC}$ ରଶ୍ମି ଟାଣ।

(ii) $\overrightarrow{AC}$ ରୁ କୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ 5ଟି ସର୍ବସମ ଅଂଶ $\overline{AP_1}, \overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \overline{P_3P_4}$ ଓ $\overline{P_4P_5}$ ଛେଦକଲେ [A କୁ କେନ୍ଦ୍ର ନେଇ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଚାପ ଅଙ୍କନ କର ଯାହା $\overline{AC}$ କୁ P_1 ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରୁ। ପୁନଶ୍ଚ P_1 ବିନ୍ଦୁକୁ କେନ୍ଦ୍ର ନେଇ ପୂର୍ବବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଅନ୍ୟ ଏକ ଚାପ କାଟ ଯାହା $\overline{AC}$ କୁ P_2 ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ। ଏହିପରି କ୍ରମାନ୍ୱୟରେ P_3, P_4 ଓ P_5 ବିନ୍ଦୁମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।]

(iii) P_5 ଓ B କୁ ଯୋଗକର ।

(iv) P_4, P_3, P_2 ଓ P_1 ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟଦେଇ $\overline{P_5B}$ ସହ ସମାନ୍ତର କରି ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{P_4Q_4}$, $\overline{P_3Q_3}$, $\overline{P_2Q_2}$ ଓ $\overline{P_1Q_1}$ ରେଖାଖଣ୍ଡଗୁଡ଼ିକ ଟାଣ ଏବଂ ସେମାନେ $\overline{AB}$ କୁ ଯଥାକ୍ରମେ Q_4,Q_3,Q_2 ଓ Q_1 ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବେ । ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା $\overline{AB}$, ପାଞ୍ଚ ସର୍ବସମଭାଗରେ ବିଭକ୍ତ ହେଲା ।

ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{AQ_1} \cong \overline{Q_1Q_2} \cong \overline{Q_2Q_3} \cong \overline{Q_3Q_4} \cong \overline{Q_4B}$ ।



(ଚିତ୍ର 6.26)

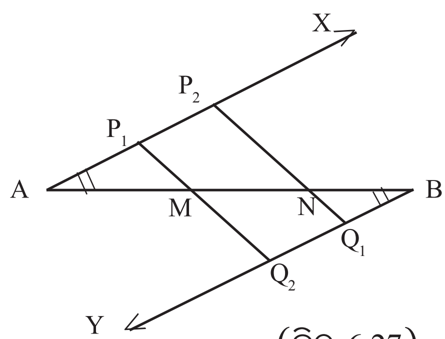
ପ୍ରମାଣ: $\overline{P_1Q_1}$, $\overline{P_2Q_2}$, $\overline{P_3Q_3}$ ଓ $\overline{P_4Q_4}$, $\overline{P_5B}$ ପରସ୍ପର ସମାନ୍ତର ଏବଂ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ଛେଦକଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ $\overline{AC}$ ଉପରେ ସମାନ ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଛେଦାଂଶମାନ ଅଙ୍କିତ, ଏଣୁ ଛେଦକ $\overline{AB}$ ଉପରିସ୍ଥ ଛେଦାଂଶମାନ ମଧ୍ୟ ସମାନ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ହେବ। ଅର୍ଥାତ୍ $AQ_1=Q_1Q_2=Q_2Q_3=Q_3Q_4=Q_4B$

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : $\overline{AB}$ ରେଖାଖଣ୍ଡରେ Q ବିନ୍ଦୁ ସଂସ୍ଥାପନ କରି AQ ଓ BQ କୁ m : n ଅନୁପାତ ବିଶିଷ୍ଟ କରିବାକୁ ହେଲେ $\overrightarrow{AC}$ ଉପରେ m+n ସଂଖ୍ୟକ ବିନ୍ଦୁର P_1, P_2, $P_{(m+n)}$ ନେଇ (ଚିତ୍ର 6.26 ଦେଖ) $P_{(m+n)}$ ଓ B ର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଅଙ୍କନ କରାଯିବ ଏବଂ କେବଳ P_m ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟଦେଇ ଉପରୋକ୍ତ ରେଖାଖଣ୍ଡ ସହ ସମାନ୍ତର ଏକ ରେଖା ଅଙ୍କନ କରାଯିବ ।

ଏହି ରେଖା ଓ $\overline{AB}$ ର ଛେଦ ବିନ୍ଦୁ ହିଁ ହେବ Q ।

ଦ୍ୱିତୀୟ ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ:

($\overline{AB}$ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ରେଖାଖଣ୍ଡ । ଏହାକୁ କେତେକ ସର୍ବସମ ଅଂଶରେ (ମନେକର 3ଟି ସର୍ବସମ ଅଂଶରେ) ବିଭକ୍ତ କରିବାକୁ ହେବ ।)



(ଚିତ୍ର 6.27)

(i) $\overline{AB}$ ରେଖାଖଣ୍ଡ ର A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଦୁଇଟି ସମାନ ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ କୋଣ ଯଥାକ୍ରମେ $\angle XAB$ ଏବଂ $\angle YBA$ ଅଙ୍କନ କର ।

(ii) $\overrightarrow{AX}$ ରୁ କୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଷିଷ୍ଟ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଅଂଶ $\overline{AP_1}$ ଓ $\overline{P_1P_2}$ ଛେଦକର । (A କୁ କେନ୍ଦ୍ର ନେଇ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଚାପ ଅଙ୍କନ କର ଯାହା $\overrightarrow{AX}$ କୁ P_1 ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ। ପୁନଶ୍ଚ P_1 ବିନ୍ଦୁକୁ କେନ୍ଦ୍ରକରି ପୂର୍ବବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଅନ୍ୟ ଏକ ଚାପ କାଟ; ଯାହା $\overrightarrow{AX}$ କୁ P_2 ରେ ଛେଦକରୁ ।)

ଏହିପରି କ୍ରମାନ୍ୱୟରେ ଏକାଧିକ ସର୍ବସମ ଅଂଶରେ ବିଭକ୍ତ କରି ପାରିବ।

(iii) ପୂର୍ବ ପ୍ରଣାଳୀ ଅନୁସରଣରେ $\overrightarrow{BY}$ ଉପରେ Q_1 ଓ Q_2 ବିନ୍ଦୁ ଚିହ୍ନଟ କର ଯେପରିକି, $AP_1=BQ_1=BQ_2$ ହେବ।

(iv) ବର୍ତ୍ତମାନ $\overline{P_2Q_1}$ ଏବଂ $\overline{P_1Q_2}$ ଅଙ୍କନ କର ଯାହା $\overline{AB}$ କୁ ଯଥାକ୍ରମେ M ଓ N ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ।

ଏଠାରେ $\overline{AB}$ ଟି ସମାନ ତିନି ସର୍ବସମ ଭାଗରେ ବିଭକ୍ତ ହେଲା।

ସେହିପରି ଗୋଟିଏ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ଯେକୌଣସି ସଂଖ୍ୟକ ସର୍ବସମ ଭାଗରେ ପରିଣତ କରି ହେବ। ଏହାର ପ୍ରମାଣ ତୁମେ ପରବର୍ତ୍ତୀ ଶ୍ରେଣୀରେ ପଢ଼ିବ।

ମନ୍ତବ୍ୟ– $\overline{AB}$ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରି 2 ଟି ସର୍ବସମ ଅଂଶରେ ପରିଣତ କଲାପରେ ପ୍ରତି ଅଂଶକୁ ପୁନଶ୍ଚ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକଲେ $\overline{AB}$ ରେଖାଖଣ୍ଡ 4 ଟି ସର୍ବସମ ଅଂଶରେ ପରିଣତ ହେବ। ସେହିପରି 4 ସର୍ବସମ ଅଂଶରୁ ପ୍ରତ୍ୟେକକୁ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କଲେ $\overline{AB}$ ମୋଟ 8 ଟି ସର୍ବସମ ଅଂଶରେ ପରିଣତ ହେବ।

ଅନୁଶୀଳନୀ– 6 (k)

1. 11 ସେ.ମି. ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ $\overline{AB}$ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଟାଣି ତାକୁ 5 ଟି ସର୍ବସମ ଅଂଶରେ ବିଭକ୍ତ କର।
2. 10 ସେ.ମି. ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ $\overline{AB}$ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଟାଣି X ବିନ୍ଦୁରେ ଏପରି ଭାବେ ଦୁଇଖଣ୍ଡ କର ଯେପରିକି, $AX=2BX$ ହେବ।
3. 8 ସେ.ମି. ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡ $\overline{AB}$ ଅଙ୍କନ କରି ଏହା ଉପରେ C ବିନ୍ଦୁ ଚିହ୍ନଟ କର ଯେପରିକି, $AC : CB = 2 : 1$ ହେବ।
4. 12.5 ସେ.ମି. ପରିସୀମା ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତ $2 : 3 : 4$ ହେବ।
5. ଗୋଟିଏ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର ପରିସୀମା 13.5 ସେ.ମି.।
   (13.5 ସେ.ମି. ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ତିନୋଟି ସର୍ବସମ ଅଂଶରେ ବିଭକ୍ତ କରି ଆବଶ୍ୟକ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର ।)
6. 9 ସେ.ମି. ରେଖାଖଣ୍ଡ ଅଙ୍କନ କରି ଏହି ରେଖାଖଣ୍ଡରେ 3 ସେ.ମି.କୁ ଏକ ଏକକ ନେଇ $2\frac{1}{3}$, $2\sqrt{2}, 2+\frac{\sqrt{3}}{2}$ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ କେଉଁ ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ନିରୂପଣ କର ।
   (ସୂଚନା : $AB = BC = CD = 3$ ସେ.ମି. ଓ $\overline{AD}$ ଦତ୍ତ ରେଖାଖଣ୍ଡ ହେଲେ $\overline{CD}$ କୁ ସମତ୍ରିଖଣ୍ଡ କର ଓ B ଠାରେ $BE = 3$ ସେ.ମି. ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର ଇତ୍ୟାଦି)

ସପ୍ତମ ଅଧ୍ୟାୟ

ତ୍ରିକୋଣମିତି
(TRIGONOMETRY)

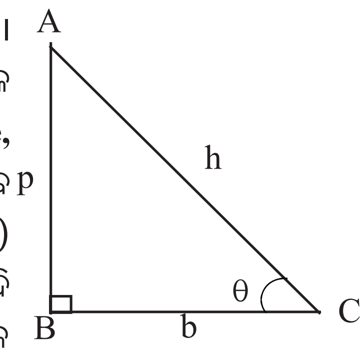
7.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ତ୍ରିକୋଣମିତି (Trigonometry) ଶବ୍ଦର ଅର୍ଥ ତିନି କୋଣର ପରିମାପ । ତ୍ରିକୋଣମିତିର ଅଭିବୃଦ୍ଧି ଜ୍ୟାମିତିର ଅଭିବୃଦ୍ଧି ସହ ସଂପୃକ୍ତ । **ଗ୍ରୀକ୍ ଜ୍ୟୋତିର୍ବିଦ୍ Hipparchus (140 B.C.)** ତ୍ରିକୋଣମିତିର ଆବିଷ୍କାର କରିଥିଲେ । ଗଣିତଜ୍ଞ **Bertholomaus Pitisces** ଷୋଡ଼ଶ ଶତାବ୍ଦୀରେ ପ୍ରଥମ ତ୍ରିକୋଣମିତି ଗ୍ରନ୍ଥ ରଚନା କରିଥିଲେ । ଗଣିତର ବିଭିନ୍ନ ଶାଖାରେ ତ୍ରିକୋଣମିତିର ପ୍ରୟୋଗ ଅତ୍ୟନ୍ତ ବହୁଳ । ଉଚ୍ଚତା ଓ ଦୂରତା (Height and Distance) ନିରୂପଣ ଏବଂ ଜ୍ୟୋତିର୍ବିଜ୍ଞାନ(Astronomy)ରେ ତ୍ରିକୋଣମିତିର ବହୁ ପ୍ରୟୋଗ ଅଛି ।

7.2 ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ (Trigonometrical Ratios) :

ମନେକର ABC ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ (ଚିତ୍ର 7.1) ଓ $\angle ABC$ ସମକୋଣ । ଏଠାରେ $\angle BAC$ ଓ $\angle BCA$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ । ମନେକର ଏଥିରୁ ଯେକୌଣସି ଗୋଟିଏ କୋଣ $\angle BCA$କୁ ନେଇ ଆମେ ଆଲୋଚନା କରିବା । ସଂକ୍ଷେପରେ $m\angle BCA$ କୁ ଡିଗ୍ରୀ ମାପରେ θ ବୋଲି ଲେଖିବା । (θ ଏକ ଗ୍ରୀକ୍ ଅକ୍ଷର ଓ ଏହାକୁ 'ଥିଟା' ବୋଲି ପଢ଼ାଯାଏ ।)

$\overline{AC}$ କୁ କର୍ଣ୍ଣ (hypotenuse), $\angle BCA$ ର ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁ $\overline{BC}$ କୁ ଭୂମି (base) ଓ $\angle BCA$ର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁ $\overline{AB}$କୁ ଲମ୍ବ (perpendicular) କୁହାଯାଏ । ସଂକ୍ଷେପରେ $BC = b$, $AB = p$ ଓ $AC = h$ ଲେଖାଯାଇଥାଏ । p, b ଓ h ରୁ ଯେକୌଣସି ଦୁଇଗୋଟିର ଅନୁପାତ, θ କୋଣର ଏକ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ । ସମୁଦାୟ ଛଅ ଗୋଟି ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ଯଥା: **sine, cosine, tangent, cotangent, secant** ଓ **cosecant** ଅଛନ୍ତି । ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ଭାବେ ଏଗୁଡ଼ିକୁ sin (ସାଇନ୍), cos (କସ୍), tan (ଟାନ୍), cot (କଟ୍), sec (ସେକ୍) ଓ cosec (କୋସେକ୍) ବୋଲି ଲେଖାଯାଏ । କୋଣ θର sin, cos ଇତ୍ୟାଦି ପ୍ରତ୍ୟେକ ଏକ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଅନୁପାତକୁ ସୂଚାଇ ଥାଆନ୍ତି । ଏହି ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତଗୁଡ଼ିକର ସଂଜ୍ଞାକୁ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଗଲା :



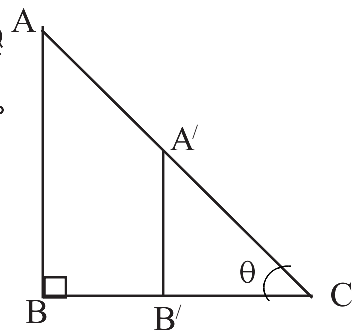
(ଚିତ୍ର 7.1)

$$\left.\begin{array}{ll} \sin\theta = \dfrac{\text{ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}}{\text{କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}} = \dfrac{p}{h} & \cot\theta = \dfrac{\text{ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}}{\text{ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}} = \dfrac{b}{p} \\ \cos\theta = \dfrac{\text{ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}}{\text{କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}} = \dfrac{b}{h} & \sec\theta = \dfrac{\text{କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}}{\text{ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}} = \dfrac{h}{b} \\ \tan\theta = \dfrac{\text{ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}}{\text{ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}} = \dfrac{p}{b} & \text{cosec}\,\theta = \dfrac{\text{କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}}{\text{ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}} = \dfrac{h}{p} \end{array}\right\} \quad .....(1)$$

ମନ୍ତବ୍ୟ (i) ଆମେ ଯଦି $\angle BCA$ ର ପରିମାଣକୁ θ ନ ନେଇ $\angle CAB$ ର ପରିମାଣକୁ θ ନେଇଥାନ୍ତେ ତେବେ, AB = ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = b ଓ BC = ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = p ହୋଇଥାନ୍ତା ।

(ii) $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$ ଓ $\text{cosec}\,\theta$ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତଗୁଡ଼ିକ ବାହୁ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ଓ $\overline{CA}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଉପରେ ନିର୍ଭର କରନ୍ତି ନାହିଁ ଏମାନେ କେବଳ ସମ୍ପୃକ୍ତ କୋଣର ପରିମାଣ ଉପରେ ନିର୍ଭର କରନ୍ତି ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ $\sin\theta = \dfrac{AB}{AC}$ ଏବଂ $\overline{AC}$ ଉପରିସ୍ଥ A' ବିନ୍ଦୁରୁ $\overline{A'B'} \perp \overline{BC}$ ହେଲେ $\Delta\, ABC$ ଓ $\Delta\, A'B'C$ ଦ୍ୱୟ ସଦୃଶ ଏବଂ $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{A'B'}{A'C} = \sin\theta$ । ମାତ୍ର $AB \neq A'B'$ ଏବଂ $AC \neq A'C$ ।



(ଚିତ୍ର 7.2)

7.3 ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସମ୍ପର୍କ (Relations among trigonometrial ratios) :

(a) ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ସଂପର୍କ (Reciprocal Relations) : $\sin\theta$, $\cos\theta$ ଆଦିର ସଂଜ୍ଞାରୁ ଆମେ ଦେଖୁଛେ ଯେ $\sin\theta$ ଅନୁପାତଟି $\text{cosec}\,\theta$ ଅନୁପାତର, $\cos\theta$ ଅନୁପାତଟି $\sec\theta$ ଅନୁପାତର ଏବଂ $\tan\theta$ ଅନୁପାତଟି $\cot\theta$ ଅନୁପାତର ବ୍ୟୁତକ୍ରମୀ (reciprocal) ।

ଯେହେତୁ

$$\left.\begin{array}{l} \sin\theta \times \text{cosec}\,\theta = \dfrac{p}{h}\times\dfrac{h}{p} = 1 \\ \cos\theta \times \sec\theta = \dfrac{b}{h}\times\dfrac{h}{b} = 1 \\ \tan\theta \times \cot\theta = \dfrac{p}{b}\times\dfrac{b}{p} = 1 \end{array}\right\} \quad .....(2)$$

ଅତଏବ

$$\left.\begin{array}{ll} \sin\theta = \dfrac{1}{\text{cosec}\,\theta} \text{ ଏବଂ } & \text{cosec}\,\theta = \dfrac{1}{\sin\theta} \\ \cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta} \text{ ଏବଂ } & \sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} \\ \tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta} \text{ ଏବଂ } & \cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta} \end{array}\right\} \quad .....(3)$$

ABC ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $AB^2 + BC^2 = AC^2$ ଅର୍ଥାତ୍ (ଚିତ୍ର 7.1ରେ)

$$p^2 + b^2 = h^2 \qquad ....(4)$$

ଏହା ସୁପ୍ରସିଦ୍ଧ **ପିଥାଗୋରାସ୍ ଉପପାଦ୍ୟ (Pythagoras Theorem)** (ଏହାକୁ ଜ୍ୟାମିତିରେ ଅଧ୍ୟୟନ କରିବ)

ପିଥାଗୋରାସ୍ ଉପପାଦ୍ୟ (ସମ୍ବନ୍ଧ (4)) ର ସହାୟତାରେ $\sin\theta$, $\cos\theta$ ଇତ୍ୟାଦି ଅନୁପାତଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରେ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାରର ସମ୍ପର୍କ ପ୍ରତିଷ୍ଠା କରାଯାଇପାରିବ ।

(b) ବର୍ଗ ସଂପର୍କ (Square Relations) :

θ ଏକ କୋଣର ପରିମାଣ ହେଲେ (θ^0 ନ ଲେଖି କେବଳ θ ଲେଖାଯାଉଛି)

$\sin\theta \times \sin\theta = (\sin\theta)^2$ କୁ $\sin^2\theta$ ବୋଲି ଲେଖାଯାଏ ।

$$\left.\begin{array}{l}\text{(i) } \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \\ \text{(ii) } \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1 \\ \text{(iii) } \operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1\end{array}\right\} \qquad .....(5)$$

ପ୍ରମାଣ : (ଚିତ୍ର 7.1)

(i) ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= \sin^2\theta + \cos^2\theta = (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2$

$$= \left(\frac{p}{h}\right)^2 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 = \frac{p^2 + b^2}{h^2} = \frac{h^2}{h^2} = 1 = \text{ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ}$$ (ସମ୍ବନ୍ଧ (4) ପ୍ରୟୋଗ କରି)

(ପ୍ରମାଣିତ)

(ii) ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= \sec^2\theta - \tan^2\theta = \left(\frac{h}{b}\right)^2 - \left(\frac{p}{b}\right)^2$

$$= \frac{h^2 - p^2}{b^2} = \frac{p^2 + b^2 - p^2}{b^2} = \frac{b^2}{b^2} = 1 = \text{ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ}$$ (ପ୍ରମାଣିତ)

(ii) ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= \operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = \left(\frac{h}{p}\right)^2 - \left(\frac{b}{p}\right)^2$

$$= \frac{h^2 - b^2}{p^2} = \frac{p^2 + b^2 - b^2}{p^2} = \frac{p^2}{p^2} = 1 = \text{ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ}$$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉପରେ ଲିଖିତ ସୂତ୍ର (i), (ii) ଓ (iii) ରୁ ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ,

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ ଏବଂ $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$,

$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ ଏବଂ $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$,

$\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$ ଏବଂ $\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - 1$ ।

(c) ଭାଗକ୍ରିୟା ସଂପର୍କ (Quotient Relations) :

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ଏବଂ $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ । ....(6)

$\sin\theta = \frac{p}{h}$ ଏବଂ $\cos\theta = \frac{b}{h}$ ନେଇ ସମ୍ପର୍କ (6) ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରିବ । (ନିଜେ ଚେଷ୍ଟା କର ।)

ଉଦାହରଣ – 1:

$\cos\theta = \frac{3}{5}$ ହେଲେ $\sin\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$ ଓ $\text{cosec}\,\theta$ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

$\cos\theta = \frac{b}{h}$ ଅତଏବ ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ $\frac{b}{h} = \frac{3}{5}$ କିମ୍ବା $\frac{b}{3} = \frac{h}{5} = k$ (ମନେକର)

$\therefore\ b = 3k,\quad h = 5k$

ସୁତରାଂ $p = \sqrt{h^2 - b^2} = \sqrt{(5k)^2 - (3k)^2} = \sqrt{16k^2} = 4k$ ।

ତେଣୁ $\sin\theta = \frac{p}{h} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$,

$\tan\theta = \frac{p}{b} = \frac{4k}{3k} = \frac{4}{3}$, $\cot\theta = \frac{b}{p} = \frac{3k}{4k} = \frac{3}{4}$,

$\sec\theta = \frac{h}{b} = \frac{5k}{3k} = \frac{5}{3}$ ଏବଂ $\text{cosec}\,\theta = \frac{h}{p} = \frac{5k}{4k} = \frac{5}{4}$ ।

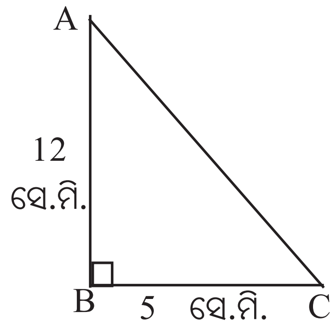
ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ : $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$,

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{4}{3}$, $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{3}{4}$,

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{5}{3}$ ଏବଂ $\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{5}{4}$

ଉଦାହରଣ – 2 :

Δ ABC ରେ ଓ $m\angle B = 90^0$ ଓ AB=12 ସେ.ମି. ଏବଂ BC=5 ସେ.ମି. ହେଲେ $\text{cosec}^2C - \tan A$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



(ଚିତ୍ର : 7.3)

ସମାଧାନ :

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$,

ଅର୍ଥାତ୍ AC = 13 ସେ.ମି. ।

$\therefore\ \text{cosec}\,C = \frac{AC}{AB} = \frac{13}{12}$ ଏବଂ $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{12}$

ଏବଂ $\text{cosec}^2 C - \tan A = \left(\frac{13}{12}\right)^2 - \frac{5}{12} = \frac{169}{144} - \frac{5}{12} = \frac{169-60}{144} = \frac{109}{144}$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – 3 :

ଯଦି $\cot\theta = \frac{a}{b}$ ତେବେ $\frac{a\cos\theta - b\sin\theta}{a\cos\theta + b\sin\theta}$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $\cot\theta = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{a}{b}$

ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{\cos\theta}{a} = \frac{\sin\theta}{b} = k$ (ମନେକର) $\therefore \cos\theta = ak$ ଓ $\sin\theta = bk$;

$$\frac{a\cos\theta - b\sin\theta}{a\cos\theta + b\sin\theta} = \frac{a \times ak - b \times bk}{a \times ak + b \times bk} = \frac{k(a^2 - b^2)}{k(a^2 + b^2)} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$ ।

$\therefore \cot\theta = \frac{a}{b}$ ହେଲେ ଦତ୍ତ ପରିପ୍ରକାଶଟିର ମୂଲ୍ୟ $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ (ଉତ୍ତର)

ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ : $$\frac{a\cos\theta - b\sin\theta}{a\cos\theta + b\sin\theta} = \frac{\frac{a\cos\theta - b\sin\theta}{\sin\theta}}{\frac{a\cos\theta + b\sin\theta}{\sin\theta}} = \frac{\frac{a\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{b\sin\theta}{\sin\theta}}{\frac{a\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{b\sin\theta}{\sin\theta}} \quad (\because \sin\theta \neq 0)$$

$$= \frac{a\cot\theta - b}{a\cot\theta + b} = \frac{a \times \frac{a}{b} - b}{a \times \frac{a}{b} + b} = \frac{\frac{a^2}{b} - b}{\frac{a^2}{b} + b} = \frac{\frac{a^2 - b^2}{b}}{\frac{a^2 + b^2}{b}} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – 4 :

$\sec\theta = \frac{13}{5}$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\frac{2\sin\theta - 3\cos\theta}{4\sin\theta - 9\cos\theta} = 3$

ସମାଧାନ : $\sec\theta = \frac{13}{5} \Rightarrow \cos\theta = \frac{5}{13}$ । ସୁତରାଂ

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{13^2 - 5^2}{13^2}} = \sqrt{\frac{12^2}{13^2}} = \frac{12}{13};$$

$$\therefore \frac{2\sin\theta - 3\cos\theta}{4\sin\theta - 9\cos\theta} = \frac{2 \times \frac{12}{13} - 3 \times \frac{5}{13}}{4 \times \frac{12}{13} - 9 \times \frac{5}{13}} = \frac{\frac{24 - 15}{13}}{\frac{48 - 45}{13}} = \frac{9}{3} = 3$$ = ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ (ପ୍ରମାଣିତ)

7.4 ସରଳ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅଭେଦ (Simple Trigonometrical Indentities) :

θ ର ଯେକୌଣସି ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ ନିମ୍ନଲିଖିତ ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକ ସତ୍ୟ ଅଟନ୍ତି ।

$\sin\theta \times \csc\theta = 1$, $\quad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$,

$\cos\theta \times \sec\theta = 1$, $\quad \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$,

$\tan\theta \times \cot\theta = 1$, $\quad \csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$ ।

ଅତଏବ ଏ ପ୍ରତ୍ୟେକଟି ସୂତ୍ର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଅଭେଦ । ମାତ୍ର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ $\sin\theta$, $\cos\theta$ ଇତ୍ୟାଦିକୁ ନେଇ ଅନେକ ଅଭେଦର ଗଠନ ସମ୍ଭବ । ସେହି ଅଭେଦଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରମାଣ କରିବା ପାଇଁ ଏହି ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରୟୋଗ ବାରମ୍ବାର କରିବାକୁ ପଡ଼େ । ପ୍ରତି ଅଭେଦରେ ଦୁଇଟି ପାର୍ଶ୍ୱ ଥାଏ । ଯଥା:ବାମପାର୍ଶ୍ୱ (L.H.S) ଓ ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ (R.H.S) । ଅଭେଦଟିର ପ୍ରମାଣ ପାଇଁ ଆମକୁ ବାମପାର୍ଶ୍ୱରୁ ଆରମ୍ଭ କରି ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱରେ କିମ୍ବା ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱରୁ ଆରମ୍ଭ କରି ବାମପାର୍ଶ୍ୱରେ କିମ୍ବା ବାମପାର୍ଶ୍ୱ ଓ ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱକୁ ସରଳୀକରଣ କରି ଏକ ସାଧାରଣ ସୋପାନରେ ପହଞ୍ଚିବାକୁ ପଡ଼ିଥାଏ ।

ଅଭେଦଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରମାଣ କଲାବେଳେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ବୀଜଗଣିତର ସୂତ୍ର ବା ଅଭେଦ ଯଥା -

$$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab,$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab\,(a \pm b),$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = (a \pm b)^3 \mp 3ab\,(a \pm b)$$

ଇତ୍ୟାଦିର ପ୍ରୟୋଗ ଆବଶ୍ୟକତା ଅନୁଯାୟୀ କରାଯାଇଥାଏ । (ଅଭେଦରେ θ (ଥିଟା) ପରିବର୍ତ୍ତେ α (ଆଲ୍‌ଫା), β (ବିଟା) ଏବଂ γ (ଗାମା) ଆଦି ଗ୍ରୀକ୍ ଅକ୍ଷର ମଧ୍ୟ ବ୍ୟବହୃତ ହୋଇଥାଏ ।)

ଉଦାହରଣ – 5 :

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, (i) $\sin^6\theta + \cos^6\theta + 3\sin^2\theta \,.\, \cos^2\theta = 1$

(ii) $\tan^4\alpha + \tan^2\alpha = \sec^4\alpha - \sec^2\alpha$

ସମାଧାନ : (i) ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= \sin^6\theta + \cos^6\theta + 3\sin^2\theta \,.\, \cos^2\theta$

$= \sin^6\theta + \cos^6\theta + 3\sin^2\theta \,.\, \cos^2\theta \times (1)$

$= (\sin^2\theta)^3 + (\cos^2\theta)^3 + 3\sin^2\theta \,.\cos^2\theta\,(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

$[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^3 = 1^3 = 1 =$ ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ (ପ୍ରମାଣିତ)

(ii) ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= \tan^4\alpha + \tan^2\alpha = \tan^2\alpha\,(\tan^2\alpha + 1) = \tan^2\alpha\,(1 + \tan^2\alpha)$

$= \tan^2\alpha \,.\, \sec^2\alpha \qquad [\because \sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha]$

ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ $= \sec^4\alpha - \sec^2\alpha$

$= \sec^2\alpha\,(\sec^2\alpha - 1)$

$= \sec^2\alpha \tan^2\alpha \qquad [\because \sec^2\alpha - 1 = \tan^2\alpha]$

$\therefore$ ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ – 6 : ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, (i) $(\sec\theta - \cos\theta)(\mathrm{cosec}\,\theta - \sin\theta) = \dfrac{1}{\tan\theta + \cot\theta}$

(ii) $\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \mathrm{cosec}\,\theta - \cot\theta$

ସମାଧାନ : (i) ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= (\sec\theta - \cos\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)$

$$= \left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right)\left(\frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta\right) = \frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta} \times \frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}$$

$[\because 1-\cos^2\theta = \sin^2\theta$ ଏବଂ $1-\sin^2\theta = \cos^2\theta]$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \times \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} = \sin\theta \,.\, \cos\theta \text{ ।}$$

ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ $= \dfrac{1}{\tan\theta + \cot\theta} = \dfrac{1}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}} = \dfrac{\sin\theta.\cos\theta}{\sin^2\theta + \cos^2\theta}$

$= \dfrac{\sin\theta.\cos\theta}{1}$ $[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

$= \sin\theta \,.\, \cos\theta$

$\therefore$ ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ (ପ୍ରମାଣିତ)

(ii) ବାମପାର୍ଶ୍ୱ$= \sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \sqrt{\dfrac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}}$

(ଲବ ଓ ହରକୁ $(1-\cos\theta)$ ଦ୍ୱାରାଗୁଣନ କରି)

$= \sqrt{\dfrac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}} = \sqrt{\dfrac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}}$ $[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

$$= \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$= \operatorname{cosec}\theta - \cot\theta =$ ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ – 7 :

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, (i) $\dfrac{\sec A - \sec B}{\tan A + \tan B} + \dfrac{\tan B - \tan A}{\sec A + \sec B} = 0,$

(ii) $\dfrac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta - 1} + \dfrac{\operatorname{cosec}^2\theta}{\sec^2\theta - \operatorname{cosec}^2\theta} = \dfrac{1}{\sin^2\theta - \cos^2\theta}$ ।

ସମାଧାନ : (i) ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= \dfrac{\sec A - \sec B}{\tan A + \tan B} + \dfrac{\tan B - \tan A}{\sec A + \sec B}$

$$= \frac{(\sec A - \sec B)(\sec A + \sec B) + (\tan A + \tan B)(\tan B - \tan A)}{(\tan A + \tan B)(\sec A + \sec B)}$$

$$= \frac{\sec^2 A - \sec^2 B + \tan^2 B - \tan^2 A}{(\tan A + \tan B)(\sec A + \sec B)}$$

$$= \frac{(\sec^2 A - \tan^2 A) - (\sec^2 B - \tan^2 B)}{(\tan A + \tan B)(\sec A + \sec B)}$$

$$= \frac{1-1}{(\tan A + \tan B)(\sec A + \sec B)} \qquad [\because \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1]$$

$$= \frac{0}{(\tan A + \tan B)(\sec A + \sec B)} = 0$$ = ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ (ପ୍ରମାଣିତ)

(ii) ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= \dfrac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta - 1} + \dfrac{\csc^2\theta}{\sec^2\theta - \csc^2\theta}$

$$= \frac{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - 1} + \frac{\frac{1}{\sin^2\theta}}{\frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta}} = \frac{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\cos^2\theta}} + \frac{\frac{1}{\sin^2\theta}}{\frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\sin^2\theta.\cos^2\theta}}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta - \cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta - \cos^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta - \cos^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta - \cos^2\theta}$$ = ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 7 (a)

(କ) ବିଭାଗ

1. ବନ୍ଧନୀ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(i) $\sin\theta \times \cot\theta =$ .... $[\cos\theta,\ \tan\theta,\ \sec\theta]$

(ii) $\cos\theta \times \tan\theta =$ .... $[\sin\theta,\ \csc\theta,\ \cot\theta]$

(iii) $\sin\theta \times \sec\theta \times \cot\theta =$ .... $[\tan\theta,\ \csc\theta,\ 1]$

(iv) $\cos\theta \times \csc\theta \times \tan\theta =$ .... $[1,\ \cot\theta,\ \sec\theta]$

(v) $\tan\theta = 1$ ହେଲେ $\tan\theta + \cot\theta =$ .... $[1,\ 2,\ \sin\theta\ .\cos\theta]$

(vi) $\tan^2\theta + \cot^2\theta - (\csc^2\theta + \sec^2\theta) =$ .... $[1, -1, -2]$

(vii) ABC ସମକୋଣୀ Δ ରେ $m\angle B = 90^0$ ଓ
AB = 3, BC = 4 ହେଲେ sinC= .... $\left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\right]$

(viii) ABC ସମକୋଣୀ Δ ରେ $m\angle B = 90^0$ ଓ
AB = 5, BC = 12 ହେଲେ cosA= .... $\left[1, \frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right]$

(ix) sin x = ... $[\sqrt{1-\cos^2 x}, \sqrt{\cos^2 x-1}, \sqrt{1-\cos x}, \sqrt{\cos x-1}]$

(x) sec x = ... $[\sqrt{1-\tan^2 x}, \sqrt{\tan^2 x-1}, \sqrt{1+\tan^2 x}, \sqrt{1+\tan x}]$

2. ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ପ୍ରଦାନ କର ।
   (i) $\sin\alpha$ କୁ $\cot\alpha$ ରେ ପ୍ରକାଶ କର ।
   (ii) $\cos\alpha$ କୁ $\tan\alpha$ ରେ ପ୍ରକାଶ କର ।
   (iii) $\operatorname{cosec}\alpha$ କୁ $\sec\alpha$ ରେ ପ୍ରକାଶ କର ।
   (iv) $\sec\alpha$ କୁ $\operatorname{cosec}\alpha$ ରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

3. ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ପ୍ରଦାନ କର ।
   (i) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ ହେଲେ $\cos\alpha \times \cot\alpha$ ର ମାନ କେତେ ?
   (ii) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ ହେଲେ $\sin\alpha \times \tan\alpha$ ର ମାନ କେତେ ?
   (iii) $\tan\alpha = \frac{5}{12}$ ହେଲେ $\cot\alpha \times \operatorname{cosec}\alpha$ ର ମାନ କେତେ ?
   (iv) $\cot\alpha = \frac{5}{12}$ ହେଲେ $\tan\alpha \times \sec\alpha$ ର ମାନ କେତେ ?

(ଖ) ବିଭାଗ

4. $\operatorname{cosec}\theta = \sqrt{2}$ ହେଲେ, ଅନ୍ୟ ପାଞ୍ଚଗୋଟି ଅନୁପାତର ମୂଲ୍ୟ କେତେ ?
5. $\tan\theta = 1$ ହେଲେ, ଅନ୍ୟ ପାଞ୍ଚଗୋଟି ଅନୁପାତର ମୂଲ୍ୟ କେତେ ?
6. $\cot\theta = \sqrt{3}$ ହେଲେ, ଅନ୍ୟ ପାଞ୍ଚଗୋଟି ଅନୁପାତର ମୂଲ୍ୟ କେତେ ?
7. Δ ABC ରେ $m\angle A = 90^0$, AB = 20 ସେ.ମି. ଓ AC = 21 ସେ.ମି. ହେଲେ, sin B, cos C ଓ tan B ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।
8. $\cos\theta = \frac{3}{5}$ ହେଲେ, $(\sin\theta - \cos\theta) \div (2\tan\theta)$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।
9. $\cos\theta = \frac{40}{41}$ ହେଲେ, $\tan\theta \div (1-\tan^2\theta)$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।
10. $\tan\theta = \frac{a}{b}$ ହେଲେ, $(\cos\theta + \sin\theta) \div (\cos\theta - \sin\theta)$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।
11. $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ ହେଲେ, $\sin\theta + \cos\theta$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।
12. $\sin\beta = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}$ ହେଲେ, $\tan\beta$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।
13. $\sin A = \frac{1}{2}$ ହେଲେ, $\cot A + \frac{\sin A}{1+\cos A}$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।
14. Δ ABC ରେ $m\angle C = 90^0$, BC = 20 ସେ.ମି. ଓ $\tan B = \frac{1}{4}$ ହେଲେ, AC ଓ AB ନିରୂପଣ କର ।

(ଗ) ବିଭାଗ

ନିମ୍ନଲିଖିତ ଅଭେଦଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରମାଣ କର । (15 ରୁ 36 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ)

15. $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta . \cos\theta$

16. $\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$

17. $\dfrac{\tan^2\theta}{\sec\theta + 1} = \sec\theta - 1$

18. $\dfrac{\cos A}{1 - \sin A} = \dfrac{1 + \sin A}{\cos A}$

19. $\cot\alpha + \tan\alpha = \operatorname{cosec}\alpha \times \sec\alpha$

20. $\cos^4\theta - 2\cos^2\theta + 1 = \sin^4\theta$

21. $\cos^4\theta - \sin^4\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

22. $\dfrac{1}{1 - \sin\theta} + \dfrac{1}{1 + \sin\theta} = 2\sec^2\theta$

23. $\dfrac{1 - \tan^3\theta}{1 - \tan\theta} = \sec^2\theta + \tan\theta$

24. $\dfrac{2\tan\theta}{1 + \tan^2\theta} = 2\sin\theta . \cos\theta$

25. $\dfrac{2\cos^2\theta - 1}{\cot\theta - \tan\theta} = \sin\theta . \cos\theta$

26. $\dfrac{\sin^2\theta}{1 + \cos\theta} + \dfrac{\sin^2\theta}{1 - \cos\theta} = 2$

27. $\dfrac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta} + \dfrac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta} - 4\tan^2\theta = 2$

28. $\dfrac{1}{1 + \tan^2\theta} + \dfrac{1}{1 + \cot^2\theta} = 1$

29. $\dfrac{1}{1 + \cos^2\theta} + \dfrac{1}{1 + \sec^2\theta} = 1$

30. $\sqrt{\dfrac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta}} + \sqrt{\dfrac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta}} = 2\sec\theta$

31. $\dfrac{\operatorname{cosec}A}{\operatorname{cosec}A - 1} + \dfrac{\operatorname{cosec}A}{\operatorname{cosec}A + 1} = 2\sec^2 A$

32. $\cot^2\theta - \dfrac{1}{\sin^2\theta} + 1 = 0$

33. $\sec A (1 + \sin A)(\sec A - \tan A) = 1$

34. $(\operatorname{cosec}\alpha - \sin\alpha)(\sec\alpha - \cos\alpha)(\tan\alpha + \cot\alpha) = 1$

35. $\dfrac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta} = (\sec\theta + \tan\theta)^2$

36. $\tan^2 A . \sec^2 B - \sec^2 A . \tan^2 B = \tan^2 A - \tan^2 B$

37. $\tan\theta + \sin\theta = m$ ଓ $\tan\theta - \sin\theta = n$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$

[ସୂଚନା : ମିଶାଣ ଓ ଫେଡାଣ କଲେ $\tan\theta = \frac{1}{2}(m+n)$ ଓ $\sin\theta = \frac{1}{2}(m - n)$]

38. $x = a\sin\theta$ ଓ $y = b\tan\theta$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\dfrac{a^2}{x^2} - \dfrac{b^2}{y^2} = 1$

[ସୂଚନା : $\frac{a}{x} = \operatorname{cosec}\theta$, $\frac{b}{y} = \cot\theta$]

39. $x = a\cos\theta + b\sin\theta$ ଓ $y = a\sin\theta - b\cos\theta$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $x^2+y^2 = a^2+b^2$

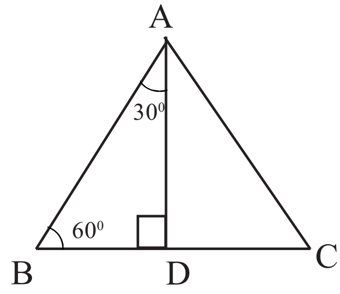
40. ଯଦି $\sin\theta + \sin^2\theta = 1$ ହୁଏ, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\cos^2\theta + \cos^4\theta = 1$

7.5 କେତେଗୋଟି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କୋଣର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ

(Trigonometrical ratios of some particular angles) :

$\theta = 30^0, 45^0$ ଓ 60^0 ହେଲେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ $\sin\theta, \cos\theta$ ଇତ୍ୟାଦିର ମୂଲ୍ୟ କିପରି ନିରୂପିତ ହୋଇ ପାରିବ ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ଦେଖିବା ।

$\boldsymbol{\theta = 30^0, 45^0}$ **:** ମନେକର ABC ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଓ ଏହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ x ଏକକ । A ବିନ୍ଦୁରୁ $\overline{BC}$ ପ୍ରତି $\overline{AD}$ ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର । Δ ABC ରେ AB = BC = CA ଏବଂ ତ୍ରିଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣର ପରିମାଣ 60^0 ।



(ଚିତ୍ର : 7.4)

ଏଠାରେ $BD = \frac{x}{2}$ ଏକକ ଏବଂ

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{3x^2}{4} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

ABD ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $m\angle B = 60^0$ ଓ $m\angle BAD = 30^0$ ।

ABD ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ

$$\sin 30^0 = \frac{BD}{AB} = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}, \qquad \cos 30^0 = \frac{AD}{AB} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan 30^0 = \frac{\sin 30^0}{\cos 30^0} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \cot 30^0 = \frac{1}{\tan 30^0} = \sqrt{3},$$

$$\sec 30^0 = \frac{1}{\cos 30^0} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \qquad \operatorname{cosec} 30^0 = \frac{1}{\sin 30^0} = 2 \quad ।$$

ସେହିପରି ABD ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $m\angle B = 60^0$ । ସୁତରାଂ

$$\sin 60^0 = \frac{AD}{AB} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos 60^0 = \frac{BD}{AB} = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2},$$

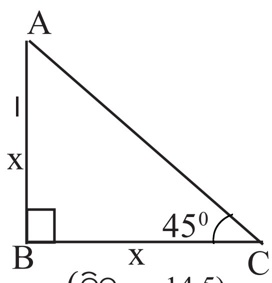
$$\tan 60^0 = \frac{\sin 60^0}{\cos 60^0} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}, \qquad \cot 60^0 = \frac{1}{\tan 60^0} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\sec 60^0 = \frac{1}{\cos 60^0} = 2, \qquad \operatorname{cosec} 60^0 = \frac{1}{\sin 60^0} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad ।$$

$\boldsymbol{\theta = 45^0}$**:** ମନେକର ABC ଏକ ସମକୋଣୀ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଓ $m\angle B = 90^0$

ଏଠାରେ $m\angle A = m\angle C = 45^0$, AB = BC = x ଏକକ ହେଲେ,

$$AC = \sqrt{x^2 + x^2} \text{ ଏକକ } = x\sqrt{2} \text{ ଏକକ}$$



(ଚିତ୍ର : 14.5)

$\angle C$ ର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ଗୁଡ଼ିକୁ ନେଲେ,

$\sin 45^0 = \frac{AB}{AC} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 45^0 = \frac{BC}{AC} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\tan 45^0 = \frac{\sin 45^0}{\cos 45^0} = 1$, $\cot 45^0 = \frac{1}{\tan 45^0} = 1$,

$\sec 45^0 = \frac{1}{\cos 45^0} = \sqrt{2}$, $\text{cosec } 45^0 = \frac{1}{\sin 45^0} = \sqrt{2}$ ।

ଏହି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କୋଣମାନଙ୍କ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତର ମୂଲ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ମନେ ରଖିବା ଉଚିତ ଓ ଏହି ମୂଲ୍ୟଗୁଡ଼ିକ ନିମ୍ନସ୍ଥ ସାରଣୀରେ ଦିଆଗଲା ।

ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ / କୋଣର ପରିମାଣ	sin	cos	tan	cot	sec	cosec
30^0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
45^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60^0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$

ଏହି ସାରଣୀରୁ ଆମେ ଦେଖୁଛେ ଯେ,

$\sin 30^0 = \cos 60^0$, $\tan 30^0 = \cot 60^0$, $\sec 30^0 = \text{cosec } 60^0$, $\sin 60^0 = \cos 30^0$, $\tan 60^0 = \cot 30^0$, $\sec 60^0 = \text{cosec } 30^0$, $\sin 45^0 = \cos 45^0$, $\tan 45^0 = \cot 45^0$ ଏବଂ $\sec 45^0 = \text{cosec } 45^0$

ଉଦାହରଣ – 8 :

$\frac{4}{3}\cot^2 30^0 + 4\sin^2 60^0 + 2\,\text{cosec}^2 45^0 + \frac{4}{3}\tan^2 60^0$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : $\frac{4}{3}\cot^2 30^0 + 4\sin^2 60^0 + 2\,\text{cosec}^2 45^0 + \frac{4}{3}\tan^2 60^0$

$= \frac{4}{3}(\sqrt{3})^2 + 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2(\sqrt{2})^2 + \frac{4}{3}(\sqrt{3})^2$

$= \frac{4}{3} \times 3 + 4 \times \frac{3}{4} + 2 \times 2 + \frac{4}{3} \times 3 = 4 + 3 + 4 + 4 = 15$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – 9 :

$\theta = 30^0$ ନେଇ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତିଦ୍ୱୟର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କର ।

(i) $\sin(2\theta) = 2\sin\theta.\cos\theta$

(ii) $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

ସମାଧାନ : (i) ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = $\sin(2\theta) = \sin(2 \times 30^0) = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ $= 2\sin\theta.\cos\theta = 2 \times \sin 30^0 \times \cos 30^0 = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ସୁତରାଂ ଉକ୍ତିଟି ସତ୍ୟ ଅଟେ ।

(ii) ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = $\cos(2\theta) = \cos(2 \times 30^0) = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$,

ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ = $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos^2 30^0 - \sin^2 30^0$

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; ଅତଏବ ଏହି ଉକ୍ତିଟି ମଧ୍ୟ ସତ୍ୟ ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ – 10 :

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\sin 60^0.\cos 30^0 + \cos 60^0.\sin 30^0 = \tan 45^0$

ସମାଧାନ : (i) ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = $\sin 60^0 . \cos 30^0 + \cos 60^0 . \sin 30^0$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} . \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ = $\tan 45^0 = 1$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 7 (b)

(କ) ବିଭାଗ

1. ବନ୍ଧନୀ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(i) $\sin 30^0$ = ... $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

(ii) $\sin 45^0 \times \cos 45^0$ = ... $\left[\sqrt{2}, 1, \frac{1}{2}\right]$

(iii) $\tan 30^0 \times \tan 60^0$ =................... $\left[\sqrt{3}, 1, 3\right]$

(iv) $\sec 60^0 \times \sin 30^0$ =................... $\left[1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$

(v) $\operatorname{cosec} 45^0 \times \sec 45^0$ =................... [1, 2, 3]

(vi) $2\cos 60^0 - 1$=................... [0, 1, 2]

(vii) $3 \tan 30^0 \times \cot 60^0 - 2$ =................... [–1, 0, 1]

(viii) $\sec 45^0 \times \operatorname{cosec} 45^0 - 2$ =................... [–1, 0, 1]

2. $\theta = 30^0$ ନେଇ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତିମାନଙ୍କର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କର ।

(i) $\sin\theta \times \cos\theta = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$ (ii) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

(iii) $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ (iv) $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

(v) $\cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

(ଖ) ବିଭାଗ

3. $\theta = 30^0, 45^0$ ଓ 60^0 ନେଇ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତିମାନଙ୍କର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କର ।

(i) $\tan\theta \times \operatorname{cosec}\theta = \sec\theta$ (ii) $\cot\theta \times \sec\theta = \operatorname{cosec}\theta$

(iii) $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta . \operatorname{cosec}\theta$ (iv) $\cos^2\theta \times \operatorname{cosec}\theta + \sin\theta = \operatorname{cosec}\theta$

4. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

(i) $\sin 60^0 . \cos 30^0 + \cos 60^0 . \sin 30^0$

(ii) $\cos 60^0 . \cos 45^0 - \sin 60^0 . \sin 45^0$

(iii) $4 \cos^3 60^0 - 3\cos 60^0$

(iv) $4 \cos^2 60^0 + 4 \sin^2 45^0 - \sin^2 30^0$

(v) $(\text{cosec}^2 45^0 + \sec^2 30^0)(\sin^2 30^0 + 4 \cot^2 45^0 - \sec^2 60^0)$

(vi) $\dfrac{\sin 30^0 + \cos 45^0 - \tan 60^0}{\cot 30^0 - \sin 45^0 - \cos 60^0}$

(vii) $\dfrac{4}{\cot^2 30^0} + \dfrac{1}{\sin^2 60^0} - \cos^2 45^0 - \tan^2 45^0$

(viii) $\dfrac{\tan^2 60^0 + 4\cos^2 45^0 + 3\sec^2 30^0 + 6\cos^2 30^0}{\text{cosec} 30^0 + \sec 60^0 + \cot^2 45^0}$

(ix) $\dfrac{\tan 45^0}{\text{cosec} 30^0} + \dfrac{\sec 60^0}{\cot 45^0} - \dfrac{2\sin 30^0}{\tan 45^0}$

(x) $\dfrac{\sin^2 60^0 + \cos^2 45^0 + \tan^2 30^0}{\cos^2 60^0 + \sin^2 45^0 + \cot^2 30^0}$

(ଗ) ବିଭାଗ

5. ଯଦି $\alpha = 60^0$ ଓ $\beta = 30^0$ ହୁଏ, ତେବେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କର ।

(i) $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha . \cos\beta - \cos \alpha . \sin \beta$

(ii) $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha . \cos\beta + \sin \alpha . \sin \beta$

(iii) $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha . \tan\beta}$

6. ପ୍ରମାଣ କର :

(i) $\sin 45^0 . \cos 60^0 . \cos 30^0 + \cos 45^0 . \sin 60^0 . \sin 30^0 = \sin 45^0 . \sin 60^0$

(ii) $\cos 60^0 = 1 - 2\sin^2 30^0 = 2\cos^2 30^0 - 1$

(iii) $\tan 60^0 = \dfrac{2\tan 30^0}{1 - \tan^2 30^0}$

(iv) $\dfrac{\cot 60^0 . \cot 30^0 + 1}{\cot 30^0 - \cot 60^0} = \sqrt{3}$

(v) $\dfrac{\tan 45^0 + \tan 30^0}{1 - \tan 45^0 . \tan 30^0} = 2 + \sqrt{3}$

(vi) $\cot 30^0 + \dfrac{1}{\text{cosec} 30^0 + \cot 30^0} = \text{cosec} 30^0$

(vii) $\dfrac{1}{\sec 45^0 - \tan 45^0} = \dfrac{1 + \sin 45^0}{\cos 45^0}$

(viii) $\dfrac{\cot^2 30^0}{\sin^2 60^0} - \dfrac{\cot^2 60^0}{\sin^2 30^0} = \cot^2 30^0 - \cot^2 60^0$

■ ■ ■

ଉତ୍ତରମାଳା

ଉତ୍ତରମାଳା - 1 (a)

1. (i) ସଂଜ୍ଞାବିହୀନ ପଦ ସରଳରେଖା, ସମତଳ, ବିନ୍ଦୁ

ସଂଜ୍ଞା ବିଶିଷ୍ଟ ପଦ : ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ, ସ୍ଥାନାଙ୍କ, ଦୂରତା, ରଶ୍ମି, ରେଖାଖଣ୍ଡ

2. (କ) ଅସଂଖ୍ୟ, (ଖ) ଅସଂଖ୍ୟ, (ଗ) ଦୁଇଟି ଓ ଗୋଟିଏ (ଘ) ସରଳରେଖା (ଙ) ଗୋଟିଏ (ଚ) 3 (ଛ) 6 (ଜ) 6

3. (i) $\overrightarrow{AC}$ (ii) $\overleftrightarrow{AC}$ (iii) $\overline{AC}$ (iv) $\overrightarrow{AB}$ ବା $\overrightarrow{AC}$ (v) $\overline{AB}$ (vi) $\overline{BC}$ (vii) {B} (viii) AB (ix) BC

4. 8; 5. 2; 6. (କ) C (ଖ) R, (ଗ) –6 ଓ 3, (ଘ) 5 ଓ 16, (ଙ) 5

7. 2 ଟି, 3 ଓ 7

ଉତ୍ତରମାଳା - 1 (b)

2. (i) 2, (ii) 1, (iii) ଅସଂଖ୍ୟ, (iv) 0, 3. (i) (ii) (iii) (v) ଓ (vi)

4.(i) 180^0, (ii) ∠BOD, (iii) (y – x). (iv) 150^0, 5.(i) 30^0, (ii) 126^0, (iii) 30^0, (iv) 80^0, 100^0, (v) 80^0, (vi) 75^0, 105^0, (vii) 15^0

6.(କ) 36, (ଖ) 44, (ଗ) 45, 7. 30, 60, 120, 8. 84, 21, 48

ଉତ୍ତରମାଳା - 1 (c)

2. $m\angle 3 = m\angle 2 = m\angle 7 = m\angle 6 = 65^0$, $m\angle 1 = m\angle 4 = m\angle 8 = m\angle 5 = 115^0$

3. $m\angle x = m\angle z = m\angle P = 60^0$, $m\angle q = m\angle r = m\angle s = 120^0$

4. $m\angle a = 75^0$, $m\angle b = 130^0$, $m\angle c = 130^0$, $m\angle d = 75^0$

5. $x^0 = 132^0$, $y^0 = 48^0$, $z^0 = 132^0$, 6. $x^0 = 75^0$, $y^0 = 50^0$

7. (i) $x^0 = y^0$, (ii) $a^0 + b^0 = 180^0$, 10.(i) 60^0, 120^0, (ii) 45^0, 135^0, (iii) 72^0, 108^0, 12. 80^0

ଉତ୍ତରମାଳା - 1 (d)

1. ଠିକ୍ ଉକ୍ତି : (a), (b), (c), (d) (e) ଏବଂ (h) ଅବଶିଷ୍ଟ ଭୁଲ୍ ଉକ୍ତି ।

2. (a) 60^0, (b) 155^0, (c) 50^0, (d) 180^0, (e) 30^0, (f) 60^0, (g) 30^0, (h) 120^0

3. (i) 60^0, (ii) 75^0, (iii) 40^0, (iv) 78^0, (v) 55^0, (vi) 100^0, (vii) 63^0, 8. $m\angle a = 75^0$

ଉତ୍ତରମାଳା - 2 (a)

1. (i) (c) AB = PQ, AC = PR, $m\angle A = m\angle P$,
(ii) (a) $m\angle A = m\angle D$, $m\angle B = m\angle E$.., AB = DF (iii) (d) $m\angle ABC = m\angle DEF$ (iv) (d) AB = PQ, $m\angle A = m\angle P$, $m\angle B = m\angle Q$ (v) (b) 3 : 1

2. (ii), (iv), (v), (vi), 3. 40^0, 4, 90^0

ଉତ୍ତରମାଳା - 2 (b)

1. (a) $\overline{BC}, \overline{AC}$ (b) $\overline{AC}$ (c) $\overline{AC}$ (d) $\overline{BC}$ (e) AB > AC > BC

2. (a) ବୃହତ୍ତର (b) କ୍ଷୁଦ୍ରତର (c) କ୍ଷୁଦ୍ରତର (d) ବୃହତ୍ତର (e) କ୍ଷୁଦ୍ରତର

ଉତ୍ତରମାଳା - 3 (a)

1. (i) 360^0, (ii) 540^0, (iii) 360^0, (iv) 120^0, (v) 8, (vi) 12, (vii) 10, (viii) 40^0, (ix) $\frac{2n-4}{n} \times 90^0$, (x) $\frac{360^0}{n}$

2. (i) 48^0, 72^0, 96^0, 144^0, (ii) 72^0, 108^0, (iii) 162, (iv) 5, (v) 100, (vi) 1080^0, 360^0, (vii) 72^0, 108^0, 3. 36^0, 72^0, 72^0, 5. 12, 6. 8 ଓ 10, 7. 6

ଉତ୍ତରମାଳା - 3 (b)

1. a, c, e, i, j, l - ଭୁଲ୍ ଉକ୍ତି, ଅବଶିଷ୍ଟ ଠିକ୍ ଉକ୍ତି । 2. (i) 45^0, (ii) 30^0, (iii) 58^0, (iv) 130^0

3. (a) ବର୍ଗଚିତ୍ର, (b) ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍, (c) ବର୍ଗଚିତ୍ର, (d) ସମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର, (e) ବର୍ଗଚିତ୍ର, (f) ବର୍ଗଚିତ୍ର (g) ଆୟତଚିତ୍ର, (h) ଆୟତଚିତ୍ର, 4. (i) 80^0, (ii) 90^0, (iii) 120^0, (iv) 108^0, (v) 80^0, 100^0

ଉତ୍ତରମାଳା - 3 (c)

1. (a) (i) QE, EF, (ii) AF, (iii) AF, (iv) CE, (v) CE
   (b) (ii) ଓ (iii) ଭୁଲ୍ ଉକ୍ତି, ଅବଶିଷ୍ଟ ଠିକ୍ ଉକ୍ତି ।

2. (i) 1:1, (ii) 1:3, (iii) 1:2, (iv) 1:4, (v) 1:3, (vi) 1:2

3. (a) ସାମନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର, (b) ରମ୍ବସ୍, (c) ବର୍ଗଚିତ୍ର, (d) ଆୟତଚିତ୍ର, (e) ସାମନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର

ଉତ୍ତରମାଳା - 4

1. (i), (ii) ଏବଂ (iv) 6. (i) 72 ବ.ସେ.ମି., (ii) 12 ସେ.ମି., 9. (i) 50 ବ.ସେ.ମି., (ii) 126 ବ.ସେ.ମି., (iii) 26400 ବ.ସେ.ମି., 10. (i) 48 ବ.ସେ.ମି., 96 ବ.ସେ.ମି., (ii) 48 ବ.ସେ.ମି., 96 ବ.ସେ.ମି.

ଉତ୍ତରମାଳା - 5 (a)

1. (i) 30 ବର୍ଗ ସେ.ମି. (ii) 16 ସେ.ମି. (iii) 10 ଏକକ (iv) $5\sqrt{3}$ ସେ.ମି. (v) 12 ସେ.ମି. (vi) ଲମ୍ବ:ପ୍ରସ୍ଥ = 2 :1 (vii) 9 ଗୁଣ (viii) 12 ବର୍ଗ ମି. (ix) 8 ବର୍ଗ ସେ.ମି. (x) 4:$\sqrt{3}$ (xi) $2\sqrt{2}$ ସେ.ମି., 2. (i) 360 ମି. (ii) 5.5 ସେ.ମି. (iii) 12 ବର୍ଗ ସେ.ମି., 3. 144 ବର୍ଗ ମିଟର, 4. 180 ବର୍ଗ ସେ.ମି. 5. 2500 ବର୍ଗ ମି., 6. 726 ବର୍ଗ ମି., 7. 36 ସେ.ମି., 8. 5 ମିଟର, 9. 12 ସେ.ମି., 10. $48\sqrt{2}$ ସେ.ମି., 11. 120 ମି., 12. $48\sqrt{3}$ ସେ.ମି., 13. 5 ସେ.ମି. ଓ 7 ସେ.ମି., 14. 20 ସେ.ମି., 15. $1500\sqrt{3}$ ମି., 12. $9\sqrt{15}$ ବର୍ଗ ସେ.ମି.

ଉତ୍ତରମାଳା - 5 (b)

1. (i) 18 ବର୍ଗ ସେ.ମି. (ii) 60 ବ.ସେ.ମି. (iii) 16 ବର୍ଗ ଏକକ (iv) 6 ଏକକ, (v) 6 ଏକକ, 2. 12 ବର୍ଗ ଡେ.ସି.ମି. 3. 10.12

ବର୍ଗ ଡେ.ସି.ମି. ବା 1012 ବର୍ଗ ସେ.ମି., 4. 1440 ବର୍ଗ ସେ.ମି., 5. 336 ବର୍ଗ ମି. 6. 480 ବର୍ଗ ସେ.ମି., 7. ଭୂମି.33 ସେ.ମି., ଉଚ୍ଚତା.22 ସେ.ମି., 8. ଉଚ୍ଚତା 15 ମି., ଭୂମି 20 ମି., 9. ଉଚ୍ଚତା 15 ମି., ଭୂମି 19 ମି., 10. 30 ସେ.ମି., 11. 10 ମି., 12. 20 ସେ.ମି., 13. 28 ମି. ଓ 30 ମି., 14. 6 ସେ.ମି. ଓ 10 ସେ.ମି., 15. 12 ମି.,20 ମି., 16. 648 ଟଙ୍କା

ଉତ୍ତରମାଳା - 5 (c)

1. (i) 16 ମି. (ii) 14 ସେ.ମି. (iii) 13 ମି. (iv) 24 ବର୍ଗ ସେ.ମି., (v) 96 ବର୍ଗ ସେ.ମି., 2. 96 ବର୍ଗ ସେ.ମି. 3. 120 ବର୍ଗ ମି., 4. 12 ସେ.ମି. ଓ 24 ସେ.ମି., 5. 252 ବର୍ଗ ସେ.ମି., 6. $\frac{2}{5}$, 7. 1 : 1, 8. 28 ମି. ଓ 20 ମି., 9. 1536 ବ.ସେ.ମି., 160 ସେ.ମି., 10. 120 ମି., 61 ମି., 11. 240 ସେ.ମି., 12. 51 ମି. ଓ 34 ମି., 13. 68 ସେ.ମି., 14. 10 ମି. ଓ 120 ବ.ମି., 15. 240 ବ.ସେ.ମି., 16. 216 ବ.ମି., 17. 80 ମି.,18 ମି., 18. 8 ମି., $8\sqrt{3}$ ମି. $32\sqrt{3}$ ବର୍ଗ ମି.

ଉତ୍ତରମାଳା - 5 (d)

1. (i)12 ବ.ସେ.ମି. (ii) 4 ସେ.ମି. (iii) 8 ସେ.ମି.(iv) 5 ସେ.ମି., (v) 14 ସେ.ମି., 2.(i)16 ସେ.ମି., (ii) 36 ବ.ସେ.ମି., (iii) 4 :1, 3. 24 ସେ.ମି., 4. 975 ବର୍ଗ ମି., 5. 18 ମି., 6. 40 ସେ.ମି., 60 ସେ.ମି., 7. 750 ବ.ସେ.ମି., 8. 170 ମି., 150 ମି.,9. 30 ମି., 10. 936 ବ.ସେ.ମି., 11. 261 ବ.ମି., 183 ବ.ମି.,12. 340 ବ.ମି., 13. 10 ସେ.ମି., 18 ସେ.ମି., 15 ସେ.ମି., 14. 672 ବ.ସେ.ମି., 15. 50 ସେ.ମି.,34 ସେ.ମି., 16. 65 ମି., 45 ମି. 17. 432 ବ.ମି.

ଉତ୍ତରମାଳା - 5 (e)

1. (a) 300 ବ.ସେ.ମି. (b) 40 ସେ.ମି. (c) 15 ମି. (d) 144 ବ.ମି., (e) 180 ବ.ମି., (f) 36 ସେ..ମି., (g) 40 ସେ.ମି., 2. 24 ମି., 30 ମି., 3. 9 ମି., 15 ମି., 3. 9 ମି.,15 ମି., 4. 1470 ବ.ସେ.ମି., 5. 19 ମି.,7 ମି., 6. 36ମି., 48 ମି., 7. 25 ମି., 32 ମି., 8. 18 ମି., 10 ମି., 9. 18 ମି., 44 ମି., 10. 828 ବ.ସେ.ମି., 11. 1284 ବ.ସେ.ମି., 12. 185.13 ବ.ମି., 13. 269.2 ବ.ସେ.ମି., 14. 1682.5 ବ.ସେ.ମି., 15. 2064 ବ.ସେ.ମି.

ଉତ୍ତରମାଳା - 5 (f)

1. (a) ନାଁ, (b) 180 ବ.ସେ.ମି. (c) 330 ବ.ସେ.ମି. (d) 6 ମି., (e) 14 ମି., (f) $14a^2$ ବର୍ଗ ଏକକ, (g) 2:1, (h) 6 ସେ.ମି., (i) 7 ଗୁଣ, (j) 1:9, (k) 4 ମି., (l) 1280 ଘ.ମି., (m) 3 ସେ.ମି., 2. (a) 31250, (b) 125%, (c) 4500 ଘ.ମି. (d) ½ ମି., (e) (i) 18 ବ.ସେ.ମି., (ii) 1:3, 3.(i) 392 ବର୍ଗ ମି., (ii) 200 ବର୍ଗ ମି., (iii) 480 ଘ.ମି., 4. 648 ବର୍ଗ ମି., 5. 456 ଟଙ୍କା, 6. 176 ବ.ମି., 7. 6 ସେ.ମି., 8. 3168 ବ.ମି., 25920 ଘ.ମି., 9. 16 ମି., 14 ମି., 10. 470 ଟଙ୍କା, 11. 1000 ଘ.ସେ.ମି., 12. 40 ମି., 13. 20 ସେ.ମି., 15 ସେ.ମି. 14. 405000 ଘ.ସେ.ମି., ବା 40.5 ଘ.ମି., 15. 20 $\sqrt{2}$ ମି., 16. 236 ବ.ମି., 17. 6 ମି., 6 ମି., 18. 6 ମି.

ଅନୁଶୀଳନୀ - 7 (a)

1. (i) $\cos\theta$, (ii) $\sin\theta$, (iii) 1, (iv) 1, (v) 2, (vi)–2, (vii) $\frac{3}{5}$, (viii) $\frac{5}{13}$

2. (i) $\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$, (ii) $\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$, (iii) $\frac{\sec\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$, (iv) $\frac{\text{cosec}\,\alpha}{\sqrt{\text{cosec}^2\alpha-1}}$

3. (i) $\frac{16}{15}$, (ii) $\frac{9}{20}$, (iii) $\frac{156}{25}$, (iv) $\frac{156}{25}$

4. $\sin\theta = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\tan\theta = \cot\theta = 1$, $\sec\theta = \sqrt{2}$

5. $\sin\theta = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sec\theta = \operatorname{cosec}\theta = \sqrt{2}$, $\cot\theta = 1$

6. $\sin\theta = \frac{1}{2}$, $\operatorname{cosec}\theta = 2$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

7. $\frac{21}{29}$, $\frac{21}{29}$ ଓ $\frac{21}{20}$ 8. $\frac{3}{40}$, 9. $\frac{360}{1519}$, 10. $\frac{a+b}{b-a}$,

11. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, 12. $\frac{m}{n}$, 13. 2, 14. 5 ସେ.ମି. $5\sqrt{17}$ ସେ.ମି.

ଅନୁଶୀଳନୀ - 7 (b)

1. (i) $\frac{1}{2}$, (ii) $\frac{1}{2}$, (iii) 1, (iv) 1, (v) 2, (vi) 0, (vii) -1, (viii) 0

4. (i) 1, (ii) $\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, (iii) -1, (iv) $\frac{11}{4}$, (v) $\frac{5}{6}$, (vi) -1, (vii) $\frac{7}{6}$, (viii) $\frac{27}{10}$,

(ix) $\frac{3}{2}$, (x) $\frac{19}{45}$